

Appello A - AM120

1.[14 punti] Determinare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\cos(x) + 1},$$

senza utilizzare la regola di De l'Hopital.

2.[18 punti] Data la funzione $f(x) = x \cos(x) - \sin(x)$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

3.[16 punti] Sia $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 e tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Dimostrare che $f(x)$ ha almeno un punto critico.

4.[20 punti] Dire per quali p é ben definito

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^p} dx$$

5.[24 punti] Data

$$f(x) = \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)},$$

1. Dire se $f(x)$ é o meno integrabile in $(1, \infty)$.
2. Calcolare la primitiva di $f(x)$.
3. Calcolare

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

6.[8 punti] Determinare la derivata seconda di

$$f(x) = e^{3x^2+x}$$