Appello A
AM210/Analisi Matematica II

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Data la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x-\sin(x)}{x^2+y^4} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Discutere continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità in $(0,0)$.

Dato che $x - \sin(x) \sim x^3/6$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3}{6(x^2+y^4)} = 0$$

L'ultimo risultato si ottiene facilmente notando che $x^2 + y^4 \geq x^2$.

Per calcolare le derivate parziali in zero calcolo

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \frac{1}{6}\,; \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = 0$$

Per la differenziabilità devo calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y) - x/6}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x - \sin(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^4}{6}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

ricordo che $x - \sin(x) - \frac{x^3}{6} \sim x^5/5!$ si ha quindi

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^5}{5!(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

usando $(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2} \geq |x|^3$. Inoltre

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy^4}{6(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy^4}{12|x|y^2|y|} \leq \lim_{(x,y)\to 0} |y| = 0$$

dato che

$$x^2 + y^4 \geq 2|x|y^2\,, \quad \sqrt{x^2+y^2} \geq |y|.$$

In conclusione la funzione in questione è differenziabile in $(0,0)$.

2. Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} + y - 1$$

sul vincolo $x^2 + y^2 = 9$.

Sul vincolo la funzione coincide con $3 + y - 1 = y + 2$, che non ha punti critici. Il massimo e il minimo sono qwuandi raggiunti al valore max er min di y compatibile col vincolo cioè $y = \pm 3$.

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \cos(t) \\ x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni generali dell'omogenea sono

$$a\sin(t) + b\cos(t)$$

Cerco una soluzione particolare per la non omogenea della forma

$$t(A\sin(t) + B\cos(t))$$

Sostituendo ottengo $B = 0, A = \frac{1}{2}$. La soluzione richiesta è

$$x(t) = (1 + \frac{t}{2})\sin(t)$$

4. Considerata la funzione

$$f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

si verifichi che $f(x,y) = 0$ è esplicitabile in funzione di x intorno ad ogni punto (x_0, x_0) con $x_0 > 0$ e $x_0 \neq e$. Detta $g(x)$ la funzione esplicitante, determinare $g'(x_0)$. Determinare la forma analitica di $g(x)$.

Noto come prima cosa che la bisettrice $y = x$ risolve $f(x,y) = 0$ per ogni x. Verifico quindi che siano soddisfatte le ipotesi del TFI per $x_0 \neq e$. Derivando si ha

$$\nabla f = (\ln(y) - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln(x))$$

calcolando in $x = y = x_0$ ottengo $\ln(x_0) - 1(1,-1)$ quindi se $x_0 \neq e$ la funzione è esplicitabile sia in funzione di y che di x. Ponendo $y = g(x)$ si ha che

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$$

da cui sostituendo si ha che $g'(x_0) = 1$ per ogni x_0. La funzione $g(x)$ cercata è quindi $g(x) = x$.

ATTENZIONE: Non è vero che $y = x$ è l'unica soluzione dell'equazione

$$\frac{\ln(y)}{y} = \frac{\ln(x)}{x}$$

Infatti la funzione $\frac{\ln(y)}{y}$ NON è iniettiva. L'insieme $f(x, y) = 0$ è composto da $y = x$ e da un'altra curva $y = h(x)$ che interseca $y = x$ nel punto (e, e).