AM210- Appello A- 27-1-2020

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+y)}{x^2+|y|^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se la funzione sia continua nel punto $(x,y) = (0,0)$. In caso affermativo:

(b) si calcolino, qualora esistano, le derivate parziali di f nel punto $(x,y) = (0,0)$;

(c) si stabilisca se f sia differenziabile nel punto $(x,y) = (0,0)$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddddot{x} - 16x = -16$$

a Scrivere tutte le soluzioni dell' equazione.

b Trovare tutte le eventuali soluzioni che soddisfano $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 1$.

Esercizio 3. Sia

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x^2 + 4y^2 - 1)(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Dire se A è compatto e farne un disegno. Trovare tutti i punti di massimo e minimo globale, qualora esistano, della funzione $f = |x|y^2$ sull'insieme A.

Esercizio 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{xt} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

discutendo l'intervallo massimale di esistenza.