Appello A - AM220

27 giugno 2019

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = \left\{ \frac{2xz}{x^2+y^2} + y^2 e^z \right\} dx + \left\{ \frac{2yz}{x^2+y^2} + 2xye^z \right\} dy + \left\{ \log(x^2+y^2) + xy^2 e^z \right\} dz$$

determinare il dominio massimale. Si dica se la forma è chiusa e se è esatta in tale dominio. Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} + x^2 = 4.$$

- Se ne calcoli la soluzione con dato iniziale $x(0) = 0$, specificando l'intervallo massimale di definizione.
- Se ne calcoli la soluzione con dato iniziale $x(0) = 2$.

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Si determini il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n(x)\}$.

- Si stabilisca se la successione $\{f_n\}$ converga uniformemente in $\mathbb{R}$.

4. Si consideri la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = \log\left(\frac{y - x^2 + 4}{xy}\right)$$

- Si determini il dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ di f e lo si disegni.
- Si determinino i punti critici di f e se ne studi la natura.
- Si stabilisca se f ammetta massimo globale e/o minimo globale nel dominio D.