Appello A - AM220

15 luglio 2019

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Si calcolino le coordinate del baricentro della regione piana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}\,.$$

Dato il campo vettoriale $E = (\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}})$ verificare il teorema della divergenza cioè che

$$\int_D \mathrm{div}(E)dxdy = \int_{\partial D} E \cdot \hat{n} ds\,.$$

2. Sia $D = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ e sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k(x)dx_k\,, \quad a_k(x) = \frac{x_k}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{3/2}}\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Stabilire se ω è esatta. Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ definita da

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), e^t, t)\,.$$

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{1 + nx^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(a) Si determini l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ di convergenza puntuale della successione f_n, cioè l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che la successione $f_n(x)$ ammette limite finito.

(b) Si calcoli (ove sia definito) il limite puntuale f della successione f_n, si calcoli cioè la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in A$.

(c) Si stabilisca se sia vera o falsa l'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

4. Trovare i coefficienti di Fourier della funzione 2π-periodica che vale

$$f(x) = \pi^2 - x^2$$

nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Discutere la eventuale convergenza uniforme della serie di Fourier della derivata.