Appello A - AM220

20 luglio 2019

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Si calcolino le coordinate del baricentro della regione piana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}\,.$$

Dato il campo vettoriale $E = (\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}})$ verificare il teorema della divergenza cioè che

$$\int_D \operatorname{div}(E) dxdy = \int_{\partial D} E \cdot \hat{n} ds\,.$$

Soluzione.

Si tratta di una mezza corona circolare. L'area è quindi pari a $\pi(4-1)/2 = 3/2\pi$. Il baricentro si trova passando in coordinate polari. $x_B = 0$ per simmetria e

$$y_B = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3\pi} \Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_1^2 \Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi} = \frac{28}{9\pi}$$

La divergenza di E è

$$\operatorname{div}(E) = \frac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 3\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

quindi

$$\int_D \operatorname{div}(E) dxdy = -\int_0^{\pi} \int_1^2 \rho \frac{1}{\rho^3} d\rho = \pi \Big[\frac{1}{\rho}\Big]_1^2 = -\frac{\pi}{2}$$

per il calcolo del flusso attraverso il bordo ho da parametrizzare due semicirconferenze e due segmenti. Ricordiamo che data una parametrizzazione $\phi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ di una curva regolare γ si ha

$$\int_\gamma E \cdot \hat{n} ds = \int_{t_0}^{t_1} E(\phi(t)) \cdot \vec{n} dt\,, \quad \vec{n} = (\dot{\phi}_2, -\dot{\phi}_1)$$

Gli integrali sui due segmenti sono nulli (infatti il campo vettoriale è orizzontale mentre il vettore normale è verticale). Riguardo alle semicirconferenze, quella di raggio 2 è parametrizzata in verso orario quella di raggio 1 in verso antiorario.

Data una semicirconferenza di raggio R parametrizzata in verso antiorario come $(R\cos(\theta), R\sin(\theta))$ con vettore normale $(-R\cos(\theta), -R\sin(\theta))$ ed $E = R^{-2}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ ottengo il flusso $-\pi/R$, quindi

$$\int_{\partial D} E \cdot \hat{n} ds = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

2. Sia $D = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ e sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k(x) dx_k\,, \quad a_k(x) = \frac{x_k}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{3/2}}\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Stabilire se ω è esatta. Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ definita da

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), e^t, t)\,, \qquad t \in [0, 1]$$

Soluzione.

Il dominio in questione è semplicemente connesso. Una primitiva della uno forma è:

$$f(x) = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}}\,.$$

L'integrale in questione è quindi

$$\int_\gamma \omega = f(1, 0, e, 1) - f(1, 0, 1, 0)$$

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{1 + nx^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(a) Si determini l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ di convergenza puntuale della successione f_n, cioè l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che la successione $f_n(x)$ ammette limite finito.

(b) Si calcoli (ove sia definito) il limite puntuale f della successione f_n, si calcoli cioè la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in A$.

(c) Si stabilisca se sia vera o falsa l'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Soluzioni.

(a) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) Il limite è $f(x) = 0$

(c) Si stabilisca se sia vera o falsa l'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

L'eguaglianza è falsa infatti:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2}\,dx \overset{y=\sqrt{n}x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\,.$$

4. Trovare i coefficienti di Fourier della funzione 2π-periodica che vale

$$f(x) = \pi^2 - x^2$$

nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Discutere la eventuale convergenza uniforme della serie di Fourier della derivata.

Soluzioni. La funzione in questione è continua ma la sua derivata, che è la funzione 2π-periodica che vale $f'(x) = -2x$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ ha una discontinuità in $x = \pi$.
Quindi serie di Fourier della derivata non converge uniformemente su $(-\pi, \pi]$ ma solo in tutti i chiusi ivi contenuti.

La serie di Fourier della funzione è data da (rem. f è pari)

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = -\frac{4\pi^2}{3}\,,$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = -4\frac{(-1)^n}{n^2}$$