Esercizio 1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\operatorname{arctg}(x))^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{4}}{x+1} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1} =$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1} =$$

dato che $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ resta una forma indeterminata

faccio lo sviluppo di Taylor del numeratore fino a ordine 1

$$\operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(1) + \frac{1}{1^2+1}(x-1) + o(x-1)$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1)$$

quindi

$$\frac{\pi}{4} \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{\pi}{4}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{2} + \frac{o(x-1)}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 2

$$\underbrace{x - \frac{x^2}{2}}_{f(x)} < \underbrace{\ln(1+x)}_{g(x)} < \underbrace{x}_{h(x)} \qquad \forall x > 0$$

noto che $f(0) = g(0) = h(0) \ (= 0)$

inoltre $f'(x) < g'(x) < h'(x) \quad \forall x > 0$

quindi $g(x) - f(x)$ è strettamente crescente con $g(0) - f(0) = 0 \Rightarrow$

$g(x) - f(x) > g(0) - f(0) = 0$

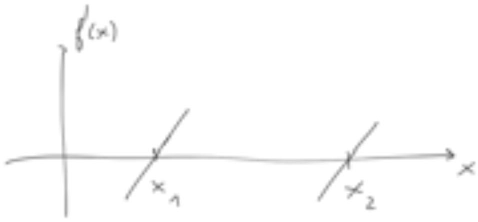
allo stesso modo $h(x) - g(x)$ è strettamente crescente con $h(0) - g(0) = 0$.

Esercizio 3.

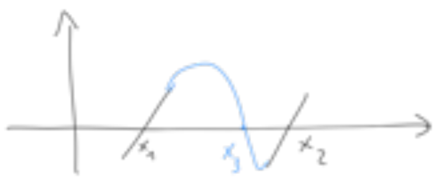
Dato che $f''(x_1)$ e $f''(x_2)$ sono entrambe positive si tratta di due punti di minimo stretto (locale)

Guardo il grafico della derivata prima (che è crescente in un intorno [illegible] di x)

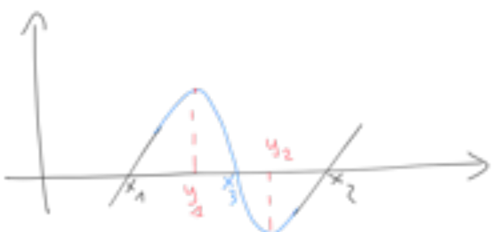
di x_1 che in un intorno di x_2)



dato che la derivata è positiva in un intorno destro di x_1 e negativa in un intorno sinistro di x_2 ed è CONTINUA, per il teorema degli zeri esiste $x_3 \in (x_1, x_2)$ in cui $f'(x_3) = 0$



Ora dato che $f'(x_1) = f'(x_3) = f'(x_2)$ e $f'(x)$ è derivabile applicando il Teorema di Rolle in (x_1, x_3) e $[x_3, x_2]$ ottengo i due punti critici di $f'(x)$ $\Rightarrow$ due punti y_1, y_2 in cui $f''(y_1) = f''(y_2) = 0$



Esercizio 4.

$$\int (\sin x)^3 dx = \int \sin x \,(1 - \cos^2 x)\, dx =$$

$$= -\int (1 - y^2)\, dy \Big|_{y = \cos x} = \left(\begin{array}{l} \text{pongo } y = \cos x \\ dy = (-\sin x)\, dx \end{array} \right)$$

$$= -\cos x + \frac{(\cos x)^3}{3}$$

Esercizio 5.

posta $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^8 (x^2 + 4x + 5)} =$

$$= \frac{1}{(x+3)^8 \left[(x+2)^2 + 1 \right]}$$

Nota che $f(x)$ è continua e

limitata in $[0,\infty)$. quindi devo solo valutare l'integrabilità ad ∞.

dato che $0 < f(x) \sim \frac{1}{x^{p+2}}$

quando $x \to \infty$ per il criterio di integrabilità asintotica ho che $f(x)$ è integrabile all'infinito $\Leftrightarrow$ lo è $\frac{1}{x^{p+2}}$ $\Rightarrow$ $p+2 > 1$ $\Rightarrow \boxed{p > -1}$

$$\lim_{b \to \infty} \int^{b} \frac{dx}{(x+3)\left((x+2)^2+1\right)} =$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_3^b \frac{dy}{(y+1)(y^2+1)}$$

$$\frac{1}{(y+1)\, y^2+1} = \frac{A}{y+1} + \frac{By + C}{y^2+1}$$

$$Ay^2 + A + By^2 + By + Cy + C = 1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = C = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \left[\int_3^b \left(\frac{1}{y+1} - \frac{y-1}{y^2+1} \right) dy \right]$$

$$\frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left[\ln(y+1) - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \operatorname{arctg}(y) \right]_3^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left[\ln\left(\frac{y+1}{\sqrt{y^2+1}} \right) + \operatorname{arctg}(y) \right]_3^b =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{4}{\sqrt{10}} \right) - \operatorname{arctg}(3) \right]$$

Esercizio 6

$$f(x) = \frac{6x^2+3}{2x^3+3x}$$