Analisi matematica 2 - Prova scritta - 10 Settembre 2019

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \log\left(\frac{(x+n)^n}{n^n}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Si studi la convergenza puntuale della successione f_n in $[0, +\infty)$.

(b) Si stabilisca se la convergenza della successione f_n sia uniforme in $[0, +\infty)$.

(c) Si stabilisca se la convergenza della successione f_n sia uniforme in $[0, 5]$.

Esercizio 2. Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right) + x^2 y$$

nel suo insieme di definizione.

Esercizio 3. Sia $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la curva piana

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ 2 - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Si calcoli l'integrale lungo la curva γ delle seguenti forme differenziali:

$$\omega(x, y) = 3x^2 \log y dx + (\frac{x^3}{y} - 1)dy\,, \quad \alpha(x, y) = (x + 3x^2 \log y)dx + (x + \frac{x^3}{y} - 1)dy.$$

Esercizio 4. Data l'equazione differenziale

$$y' = 2\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}}, \qquad \text{dove } y = y(x) \text{ con } x \in (0, +\infty),$$

(a) si determini la soluzione $y = y(x)$ al problema di Cauchy con dato iniziale $y(1) = 1$,

(b) si stabilisca se il problema di Cauchy con dato iniziale $y(1) = 0$ ammetta un'unica soluzione.