Appello C - AM210

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$$

sul vincolo $x^4 + y^4 \leq 1$.

Soluzione: Cerchiamo innnanzitutto i punti critici ponendo:

$$\nabla f := (4x^3 - 4(x-y), 4y^3 - 4(y-x)) = 0$$

Le cui soluzioni sono $x = y = 0$ e $y = -x = \pm\sqrt{2}$. L'unico punto critico contenuto nella regione in esame è l'origine che ha hessiano semidefinito negativo. È facile vedere che $(0,0)$ è un punto di sella, dato che la funzione ristretta alla retta $y = x$ ha un minimo in zero, mentre la restrizione alla retta $y = -x$ ha un massimo.

Passiamo a studiare i massimi e minimi sul bordo (deve esserci sia un massimo che un minimo di f nella regione considerata dato che si tratta di un compatto). Utilizzo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ponendo

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) - 4\lambda x^3 = 0 \\ 4y^3 - 4(y-x) - 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

sommando le prime due equazioni ottengo $y = -x$ sostituendo nel vincolo ottengo $x = \pm 2^{-1/4}$. Notando che

$$f(2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, -2^{-1/4}) = 3$$

$$f(2^{-1/4}, -2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = 3 - 8\sqrt{2}$$

posso stabilire che il massimo della funzione nell'insieme dato è 3 e il minimo $3 - 8\sqrt{2}$ (quindi in effetti non aveov nessun bisogno di classificare che tipo di punto critico fosse l'origine).

2. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\dot{x} + x\cos(t) = \cos(t)$$

e il loro intervallo massimale di esistenza. Trovare in particolare la soluzione tale che $x(0) = x(\pi/2)$.

Soluzione: (fra molte strategie possibili) Si tratta di un sistema lineare non omogeneo, quindi per ogni dato iniziale esiste una unica soluzione definita per tutti i tempi. Una soluzione particolare dell'equazione è $x(t) = 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{hom}}(t) = x_0 e^{-\sin(t)}$$

quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = x_0 e^{-\sin(t)} + 1$$

che soddisfa $x(0) = x(\pi/2)$ se $x_0 = 0$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+x^3+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se la funzione sia continua nel punto $(x,y) = (0,0)$. In caso affermativo:

(b) si calcolino, qualora esistano, le derivate parziali di f nel punto $(x,y) = (0,0)$;

(c) si stabilisca se f sia differenziabile nel punto $(x,y) = (0,0)$.

Soluzione: Dato che $\operatorname{sen}(x^2 + x^3 + y^2) = x^2 + x^3 + y^2 + O(x^2 + x^3 + y^2)^3$ la funzione è continua ma non differenziabile. Infatti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + x^3 + y^2 + O(x^2 + x^3 + y^2)^3}{x^2 + y^2} = 1$$

inoltre

$$\partial_x f(0,0) = 1\,, \quad \partial_y f(0,0) = 0$$

e si ha che il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3 + O(h^2 + h^3 + k^2)^3 - h(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

non esiste.