Prendiamo spazio di Banach E, F

(per esempio E le funzioni $C^1(I, \mathbb{R}^n)$
(I un intervallo in $\mathbb{R}$) con la norma

$$|u|_{C^1} = \sup_{t \in I} |u(t)| + \sup_{t \in I} |u'(t)| ,$$

F le funzioni $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ con la norma
del sup $|u|_\infty = \sup_{t \in I} |u(t)|$

Posso considerare

(1) lo spazio delle funzioni continue

$f : E \to F$ tali che $\forall \varepsilon \; \exists \delta$:

se $|u - v|_{C^1} < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)|_\infty < \varepsilon$

(2) lo spazio delle funzioni lineari continue

$\ell : E \to F$ $\quad (\ell(u+v) = \ell(u) + \ell(v))$

N.B. in dim. ∞ NON tutte le mappe lineari sono continue

Esempio $\quad L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$

$L[u](t) := \dot{u}$ NON è invertibile $\ker$ = costanti

lavoro su $C^1_0(I, \mathbb{R}^n)$ $\left(f \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \quad f(0)=0 \right)$

$\frac{d}{dt} : u \longrightarrow \dot{u}$ è invertibile l'inversa

è la primitiva $\int_0^t d\tau$

su $\mathcal{L}[E,F]$ metto la norma operatoriale

$$\|\ell\|^{op}_{E,F} = \sup_{h \in E} \frac{|\ell[h]|_F}{|h|_E} = \sup_{|h|_E = 1} |\ell[h]|_F$$

$\left(\text{N.B.} \quad \left\|\frac{d}{dt}\right\|^{op} = 1 \right)$

② lo spazio delle funzioni differenziabili:

f è differenziabile in x_0 se $\exists$

$\ell \in \mathcal{L}(E,F)$ (spazio delle funzioni LINEARI e CONTINUE $E \to F$)

tale che $f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell(x_0)[h] + o(|h|_E)$

Nota bene df così definito si può calcolare tramite la derivata di Fréchet

$$d f'[h] = \frac{d}{d\varepsilon} f(x+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} \qquad (*)$$

Questo è equivalente a dire che se f è differenziabile allora si esprime in termini delle derivate direzionali.

Esercizio: dimostrare che se f è differenziabile allora vale $(*)$.

dico che f è $C^1(E,F)$ se

$x \to \ell(x)$ è continua

$E \to \mathcal{L}(E,F)$

Esempio $f(u) = u^3 \qquad E = C^0(I,\mathbb{R}) = F$

$d_u f[h] = 3u^2 h =: \ell(u)[h] \qquad \|\ell(u)\|^{op} = 3|u|_\infty^2$

$u \to \ell(u)$ è continua. (è Lip!)

$$\|\ell(u)[h] - \ell(v)[h]\|^{op} = 3\frac{|(u^2-v^2)h|_\infty}{|h|_\infty} \leq 3|u+v|_\infty |u-v|_\infty$$

Vale il teorema della Funzione Implicita!

Data $f: A \times E \to F$ differenziabile t.c. ① $f(x_0,y_0)=0$ ② $y \to d_y f(x,y)$ ē continua

③

$\exists \quad T: \quad F \to E \qquad$ t.c. $\qquad d_y f \, T = id_F$

$$T \, d_y f = id_E$$

allora in un intorno di (x_0, y_0)

$f(x,y)=0 \iff$ graf $(\, y = g(x) \,)$

con $g : B_r(x_0) \longmapsto B_\rho(y_0)$

(vale lo statement quantitativo di Chierchia)

Esempio: $\qquad f(\lambda, u) := \quad u' + \lambda u^3$

① $f(0,0)=0 \qquad d_u f(0,0)[h] = h'$

$$d_u f(\lambda_0, u_0)[h] = \frac{d}{d\varepsilon} f(\lambda_0, u_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\left[(u_0 + \varepsilon h)' + \lambda_0 (u_0 + \varepsilon h)^3 \right]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= h' + 3\lambda_0 u_0^2 h$$

② la mappa $(\lambda_0, u_0) \longrightarrow \frac{d}{dt} + 3\lambda_0 u_0^2 \cdot$

$$\mathbb{R} \times C_0^1 \longrightarrow \mathrm{Lin}\left(C_0^1, C^0 \right)$$

è continua

③ $d_u f(0,0) = \frac{d}{dt}$ è invertibile

come mappe $C_0^1 \longrightarrow C_0$

(l'inversa è $T = \int_0^t d\tau$)

DAL TFI

$\Rightarrow$ per λ piccoli esiste una soluzione

$u(\lambda, t)$: $\quad u'(\lambda) + \lambda u^3(\lambda) = 0$

inoltre u è C^1 in λ.

— · — · — · — · —

Altro esempio

$$f(\lambda, u) = u' + \lambda u^2 - \cos t = 0$$

f mappa le funzioni 2π-periodiche DISPARI e C^2 nelle funzioni 2π-periodiche pari C^1

① $f(0, \sin t) = 0$

② $d_u f(\lambda, u)[h] = \dot{h} + 2\lambda u h$

anche questa mappa è continua!

③ $d_u f(0, \cos t) = \frac{d}{dt}$

ora $\frac{d}{dt}$ come mappa delle funzioni 2π-periodiche DISPARI nelle 2π-periodiche PARI è invertibile

$$\frac{d}{dt} \sum_k b_k \sin kx = \sum k b_k \cos kx$$

l'inversa è $\int_0^t dt \left(\sum a_k \cos kx\right) = \sum \frac{a_k}{k} \sin kx$

(N.B. ho messo lo spazio delle funzioni C^2

perché così posso sempre usare Fourier e scambiare i limiti come mi pare)

Valgono le hp. del TFI quindi per λ piccolo esiste una soluzione 2π-periodica e dispari del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} + \lambda u^2 = \text{cost} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Divagazione il differenziale v.s il gradiente

Supponete che sullo spazio di Banach E ho un prodotto scalare.

Es. $\quad |u|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} u^2(t)\, dt} \qquad (u, g) = \int_0^{2\pi} u(t) g(t)\, dt$

Prendiamo $f : E \to \mathbb{R}$

(per esempio $u \longrightarrow \int_0^{2\pi} u^3(t)\, dt$)

calcoliamo il differenziale

$$d f(u)[h] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{2\pi} (u+\varepsilon h)^3 dt \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= 3\int_0^{2\pi} u^2(t)\, h(t)\, dt \quad = (3u^2, h)$$

quindi $f(u) = f(u_0) + (3u_0^2, h) + o(|h|_E)$

$\underline{3u^2 =: \nabla f(u)}$ $\qquad f(u) = f(u_0) + \nabla f(u_0) \cdot h + o(|h|_E)$

prodotto scalare in E

Se E non ha un prodotto scalare

oppure se $f: E \to F$ (con F di dimensione ∞)

<u>si usa solo il differenziale</u>