Sia $\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

allora se $\exists\ u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ soluzione

tale soluzione è unica

ora se D t.c. $|f(u) - f(v)| < L|u - v|$

in D e D_0 t.c. $N_r(D_0) \subset D$

Proposizione 8.10 *Data f come nel Teorema 8.8, siano $s > 0$ e $D_0 \subseteq D$ una sfera chiusa tali che per ogni $\bar{u} \in D_0$ esista una funzione $C^1([t_0 - s, t_0 + s], D)$ $t \to \varphi(t; \bar{u})$, che soddisfi $\partial_t \varphi = f(\varphi; t)$ e $\varphi(t_0; \bar{u}) = \bar{u}$. Allora la funzione $\bar{u} \in D \to \varphi(t; \bar{u})$ è lipschitziana con costante di Lipschitz $e^{L|t-t_0|}$:*

$$|\varphi(t; \bar{u}) - \varphi(t; u_0)| \leq e^{L|t-t_0|} |\bar{u} - u_0| \ , \qquad \forall\ t \in I \ , \ \forall\ \bar{u}, u_0 \in D_0 \ , \tag{8.26}$$

dove $I := [t_0 - s, t_0 + s]$.

In particolare $\varphi(t; \bar{u})$ è continua come funzione di $\bar{u}$. Infatti è facile vedere che φ è *uniformemente lipschitziana (e quindi continua) come funzione di $(1 + n)$ variabili*[11].

Per dimostrare la proposizione abbiamo bisogno del seguente risultato

Lemma di Gronwall:

Lemma 8.11 (Gronwall) *Sia I un intervallo, $\delta, \alpha \in (0, \infty)$ e $g \in C(I, \mathbb{R})$ una funzione continua e positiva tale che, per un qualche $t_0 \in I$,*

$$g(t) \leq \delta + \alpha \left| \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \right| \ , \qquad \forall\ t \in I \ . \tag{8.27}$$

Allora, per ogni $t \in I$, si ha

$$g(t) \leq \delta e^{\alpha |t - t_0|} \ . \tag{8.28}$$

Dim: $t \geq t_0$ pongo $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau$

$G(t) \geq 0 \Rightarrow g(t) \leq \delta + \alpha\, G(t)$

cioè $G'(t) \leq \delta + \alpha\, G(t)$

moltiplico per $e^{-\alpha t}$

$$\underbrace{e^{-\alpha t} G'(t) - \alpha e^{-\alpha t} G(t)}_{\left(G(t)\, e^{-\alpha t}\right)'} \leq \delta e^{-\alpha t}$$

$$\left(G(t)\, e^{-\alpha t}\right)' \leq \delta e^{-\alpha t}$$

$h(t) = G(t)\, e^{-\alpha t}$ ora integro $\int_{t_0}^{t}$ (uso $t > t_0$)

$$h(t) - h(t_0) \leq \delta \left(\frac{e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)$$

$$G(t) \leq \frac{\delta}{\alpha} \left(e^{\alpha(t-t_0)} - 1 \right)$$

$$g(t) \leq \delta + \alpha \frac{\delta}{\alpha} \left(e^{\alpha(t-t_0)} - 1 \right) \quad \blacksquare$$

se $t \leq t_0$ stessa cosa con

$$\dot{g} \leq \delta - \alpha G \qquad \text{(integrando da } t \text{ a } t_0\text{)}$$

Dimostriamo la proposizione:

$$\varphi(t, u_0) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(\tau, u_0))\, d\tau$$

$$\varphi(t, \bar{u}) = \bar{u} + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(\tau, \bar{u}))\, d\tau$$

$$g(t) = |\varphi(t, u_0) - \varphi(t, \bar{u})|$$

$$g(t) \leq |\bar{u} - u_0| + \left| \int_{t_0}^{t} f(\varphi(\tau, u_0)) - f(\varphi(\tau, \bar{u}))\, d\tau \right|$$

$$\leq \underbrace{|\bar{u} - u_0|}_{\delta} + \underbrace{L}_{\alpha} \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau, u_0) - \varphi(\tau, \bar{u})|\, d\tau \right|$$

!

<u>DOMANDA</u>: $\dot{u} = f(u)$ con $f \in C^\infty$

$\Rightarrow$ $\phi(t, u_0)$ é C^∞ in t.

Qual è la regolarità in u_0?

Un'altra applicazione del LEMMA di GRONWALL

Prop (8.14 Chierchia) se $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ ed esiste $C>0$ t.c. $|f(x)| < c(1+|x|)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

allora
$\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists!$ sol $\phi(t, u_0) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

(cioè $I_{u_0} = \mathbb{R}$)

Dim: x assurdo se $I_{u_0} = (a, b)$ con $b < \infty$

$$|u(t)| \leq |u_0| + \left| \int_{t_0}^{t} f(u(\tau))\, d\tau \right|$$

$$\leq |u_0| + c|t-t_0| + c \int_{t_0}^{t} |u(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq \delta + c \int_{t_0}^{t} |u(\tau)|\, d\tau \qquad (\delta = |u_0| + c|b-t_0|)$$

dal lemma di Gronwall $|u(t)| \leq \delta e^{c|t-t_0|}$

quindi $\sup_{t_0 \leq t \leq b} |u(t)| \leq \delta e^{c|b-t_0|} \equiv R < \infty$

quindi $u(t)$ resta dentro alla palla chiusa

$B_R(0)$. Ma dall'esercizio sulla fuga dai compatti $\Rightarrow$ la soluzione può essere estesa a $t > b$.

<u>Esercizio</u>:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{v} = g(v) \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo che $u(t), v(t) \in K$ (compatto)

$\forall\ t \in (a,b)$ (non necessariamente massimale)

e poniamo $M := \sup\limits_{x \in K} |g(x) - f(x)|$

L costante di Lipschitz di f e g in K,

dare una stima per $|u(t) - v(t)|$

$$u(t) - v(t) = \int_{t_0}^{t} f(u) - g(v)$$

$$|u - v| \leq \left| \int^{t} |f(u) - f(v)| \right| + \left| \int_{t_0}^{t} |f(v) - g(v)| \right.$$

t_0

$$|u-v| \leq M|b-a| + L\left|\int_{t_0}^{t} |u(\tau)-v(\tau)|\,d\tau\right|$$

LEMMA di Gronwall (forma differenziale)

se $u(t) \in C^1(I, \mathbb{R})$ soddisfa

$$\dot{u}(t) \leq L\,|u(t)| \qquad \forall\, t \in I$$

allora $\forall\, t_0 \in I$

① se $u(t_0) \leq 0 \Rightarrow u(t) \leq 0 \quad \forall\, t > t_0$

② se $u(t_0) \geq 0 \Rightarrow u(t) \leq 0 \quad \forall\, t < t_0$

(conviene disegnare le traiettorie)

se $u(t_0) < 0$ ma non vale la tesi

$\exists\, t_1$ t.c. $u(t_1) = 0$ e $u(t) > 0$ in un intorno destro di t_1 (chiamo l'intorno (t_1, b))

dato che $u(t) > 0$ in (t_1, b)

ho che $u'(t) \leq L\,u(t)$ in (t_1, b)

cioé $u' - Lu \leq 0$

$h(t) = e^{-Lt} u(t)$ $\qquad h' = e^{-Lt} u' - e^{-Lt} Lu$

quindi $h'(t) \leq 0$ in (t_1, b)

integrando $e^{-Lt} u(t) - e^{-Lt_1} u(t_1) \leq 0$

(ma $u(t_1) = 0$) $\Rightarrow$ $u(t) \leq 0$

è un assurdo ∇! ($u(t) > 0$ in (t_1, b))

per fare il II caso $v(t) = -u(-t)$

Teoremi di confronto:

sulla retta: se ⓪ si muove partendo da x_0 con velocità ALMENO v_0 e ① si muove partendo da x_1 con velocità al più v_1 se $v_0 > v_1$ e $x_0 > x_1$ allora A resta sempre davanti a B

Corollario 3.9 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g \in C(A, \mathbb{R})$ con g localmente lipschitziana in x uniformemente in t. Sia I un intervallo, $\bar{t} \in I$ e siano $u, v \in C^1(I, \mathbb{R})$ tali che $(t, u(t)) \in A$ e $(t, v(t)) \in A$ per ogni $t \in I$ e tali che*

$$\begin{cases} u'(t) \leq f(u(t), t) \\ v'(t) \geq g(v(t), t) \end{cases}, \tag{3.53}$$

$$f(u(t), t) \leq g(u(t), t)\,. \tag{3.54}$$

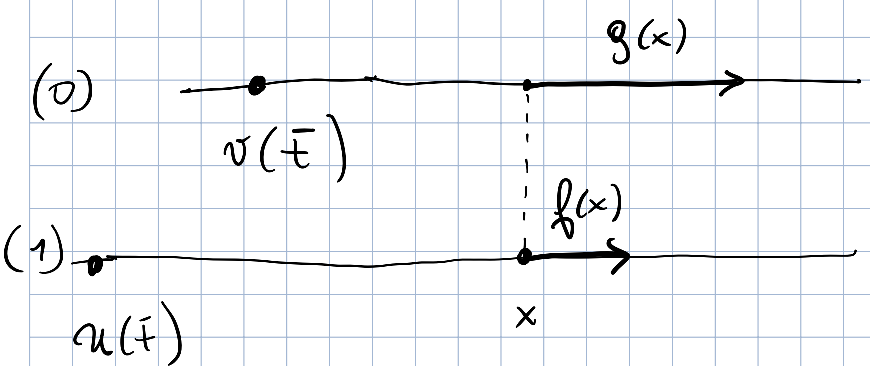
Allora, se $u(\bar{t}) \leq v(\bar{t})$ si ha che $u(t) \leq v(t)$ per ogni $t \in I$, $t \geq \bar{t}$; se se $u(\bar{t}) \geq v(\bar{t})$ si ha che $u(t) \geq v(t)$ per ogni $t \in I$, $t \leq \bar{t}$.

Dimostrazione Siano $a < \bar{t} < b$. $a.b \in I$ e sia

$v(t)$ sarebbe (0) e $u(t)$ sarebbe (1).

(solo che qui la velocità varia nel tempo)

Anche nel caso autonomo è chiaro



$\forall x \quad g(x) \geq f(x)$

quando passano per x la velocità di A è $\geq$ della velocità di B

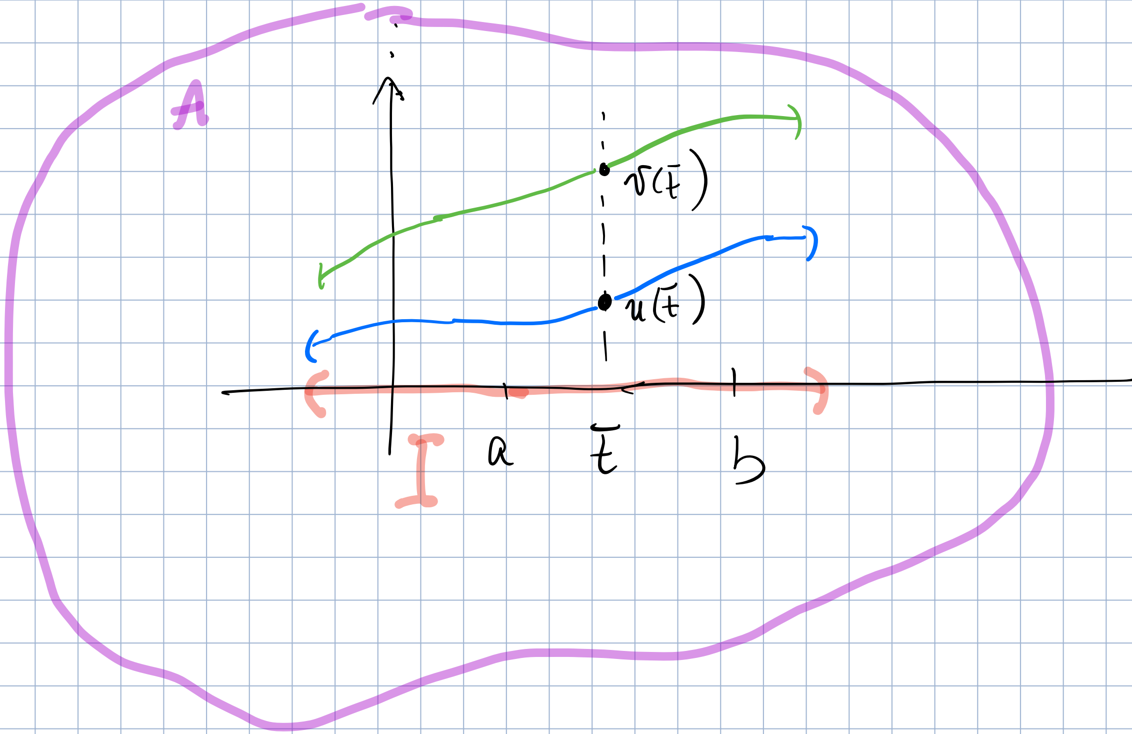
Dimostrazione Siano $a < \bar{t} < b$, $a, b \in I$ e sia

$$\Gamma = \{(u(t), t) \big| t \in [a, b]\} \cup \{(v(t), t) \big| t \in [a, b]\}\,,$$

e $K \subseteq A$ un qualunque compatto che contenga Γ. Sia[35] $L > 0$ tale che $|g(x, t) - g(y, t)| \leq L|x - y|$, per ogni $(x, t), (y, t) \in K$. Allora, se $w := u - v$ segue che

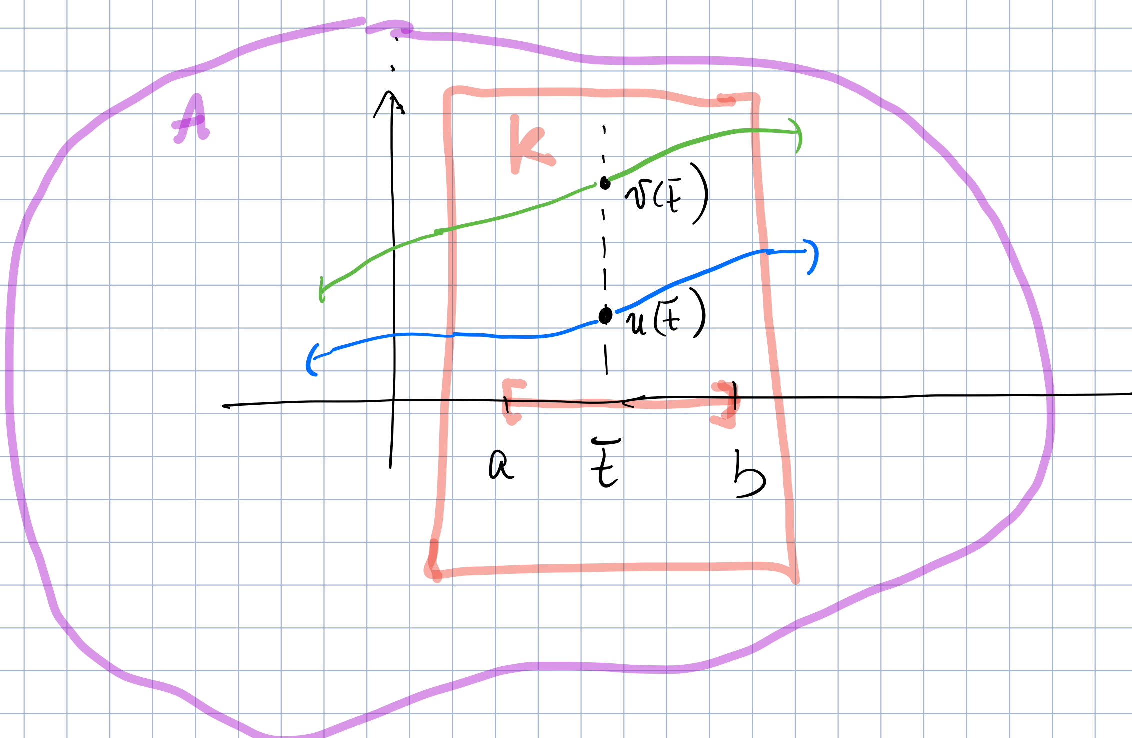
$$\begin{aligned} w' &= u' - v' \overset{(3.53)}{\leq} f(u, t) - g(v, t) \overset{(3.54)}{\leq} g(u, t) - g(v, t) \leq |g(u, t) - g(v, t)| \leq L|u - v| \\ &= L|w|\,, \end{aligned}$$

e la tesi, per $t \in [a, b]$, segue dal Lemma 3.8 con u sostituito da w e I da $[a, b]$. Dall'arbitrarietà di a e b, segue la tesi per $t \in I$. ∎



$[a,b]$ è un compatto $\Rightarrow$ Γ è compatto

mi restringo ad $[a,b]$ (ovviamente in questo disegno I è compatto quindi potevo direttamente prendere $I = [a,b]$)



calcolo la costante di Lipschitz di g in K

(la chiamo L)

$w(t) = u(t) - v(t)$

$$
\begin{aligned}
w' &\leq f(u(t),t) - g(v(t),t) \qquad (f \leq g) \\
&\leq g(u(t),t) - g(v(t),t) \\
&\leq |g(u(t),t) - g(v(t),t)| \\
&\leq L\,|w(t)|
\end{aligned}
$$

(applico il lemma di Gronwall in

forma differenziale se $v(\bar{t}) > u(\bar{t})$

$(w(\bar{t}) < 0)$ $\Rightarrow$ $v(t) \geq u(t)$ $\forall\, t > \bar{t}$

L'altro verso PER ESERCIZIO