Osserviamo che se considero l'ODE lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e applichiamo il cambiament di coordinate dipendenti dal tempo

$$x(t) = W(t)\,y(t) \qquad \left(\begin{array}{l} \dot{W} = A\,W \\ W(0) = \mathbb{I} \end{array} \right)$$

si ottiene $\dot{W}y + W\dot{y} = AWy$

cioè $AWy + W\dot{y} = AWy$ cioè

(REM $W(t)$ è sempre invertibile)

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

le colonne di W rappresentano un sistema di riferimento SOLIDALE col moto (in quel sistema di riferimento)

il punto materiale è FERMO

Esercizio:

Siano A, B matrici che COMMUTANO

dimostrare che $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$

Dim:

$e^{(A+B)t}$ è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \dot{X} = (A+B)X \\ X(0) = \mathbb{1} \end{cases}$$ con $X(t) \in Mat(n \times n)$

procediamo per variazione di costanti

ponendo

$X(t) = e^{At} Y(t)$ (anche $Y(t) \in Mat(n \times n)$)

si ottiene

$$(A+B)X = \dot{X} = Ae^{At}Y + e^{At}\dot{Y}$$

da cui
$$\begin{cases} \dot{Y} = e^{-At} B e^{At} Y \\ Y(0) = \mathbb{I} \end{cases}$$

ma ricordando che A e B commutano

si ha
$$\begin{cases} \dot{Y} = BY \\ Y(0) = \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \quad Y(t) = e^{Bt}$$

quindi $e^{(A+B)t} \equiv X(t) = e^{At}\,Y(t) = e^{At}e^{Bt}$ ∎

Ora consideriamo invece

l'eq. di HEISENBERG

$$\begin{cases} \dot{X} = [A,X] \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$ dove $X(t) \in \mathrm{Mat}(n\times n)$

$X_0 \in \mathrm{Mat}(n\times n)$

(equivalentemente portei fare $\begin{cases} \dot{X} = [X, A] \\ X(0) = X_0 \end{cases}$)

dato che $M \longrightarrow [A, M]$ è un operatore lineare sullo spazio delle matrici

$$X(t) = e^{(ad_A)t} X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad_A)^k}{k!} X_0$$

$$= X_0 + [A, X_0] + \frac{1}{2}[A,[A, X_0]] + \frac{1}{6}[A,[A,[A,X_0]]] + \dots$$

d'altro canto è facile verificare DIRETTAMENTE che

$$X(t) = e^{At} X_0 e^{-At}$$

quindi $e^{At} X_0 e^{-At} = e^{(ad_A)t} X_0$

(legame fra serie di Lie e coniugazione)