Quindi è TFI dice che se ho

$$\mathcal{F} : A \times E \longrightarrow F \qquad C^1 \text{ in un intorno}$$
$$\lambda, u \longrightarrow \mathcal{F}(\lambda, u) \qquad \text{di } \lambda_0, u_0$$

t.c. $\mathcal{F}(\lambda_0, u_0) = 0$ e

$d_u \mathcal{F}(\lambda_0, u_0)[\cdot] \in \mathcal{L}(E, F)$ è invertibile

(funzioni lineari continue)

allora $\exists\, r, \rho$: e una funzione C^1

$$g : B_r(\lambda_0) \longrightarrow B_\rho(u_0) \quad : \quad \mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \iff u = g(\lambda)$$

Esempio:

$$f(\lambda, u) = u' + \lambda u^2 - \cos t = 0$$

f mappa le funzioni 2π-periodiche DISPARI e C^2 nelle funzioni 2π-periodiche pari C^1

① $f(0, \sin t) = 0$

② $d_u f(\lambda, u)[h] = \dot{h} + 2\lambda u h$

anche questa mappa è continua!

③ $d_u f(0, \cos t) = \frac{d}{dt}$

...ro $\frac{d}{dt}$ come mappa delle funzioni

...2π- periodiche DISPARI nelle 2π- periodiche

...PARI è invertibile

$$\frac{d}{dt} \sum_k b_k \sin kx = \sum k b_k \cos kx$$

l'inversa è $\int_0^t dt \left(\sum a_k \cos kx \right) = \sum \frac{a_k}{k} \sin kx$

N.B. ho messo lo spazio delle funzioni C^2

...erché così posso sempre usare Fourier e

cambiare i limiti come mi pare

Valgono le hp. del TFI quindi

per λ piccolo esiste una soluzione

2π-periodica e dispari del problema

di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} + \lambda u^2 = \cos t \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio

Provare a fare lo stesso ragionamento

con $\ddot{u} + 2u + \lambda u^3 = -\sin t$

$(\lambda_0, u_0) = (0, \sin t)$

Dimostrare l'esistenza di soluzioni 2π-periodiche

dispari.

Punto principale

dimostrare che $h \to \ddot{h} + 2h$ è

iniettiva e suriettiva come mappa

da $C^3_{2\pi\text{-per}} \to C^1_{2\pi\text{-per}}$

cioè $\forall \; f \in C^1_{2\pi\text{-per}} \quad \exists! \; h \in C^3_{2\pi\text{-per}}$

t.c. $h'' + 2h = f$.

dato che f è C^1 $\quad f(t) = \sum f_k e^{ikt}$ (unif e tot convers.)

poniamo $h(t) := \sum \dfrac{f_k}{2-k^2} e^{ikt}$

osservo che $\sum \dfrac{k^2 f_k}{2-k^2} e^{ikt}$ è unif. e tot. convergente

infatti $\sum \dfrac{k^2}{|2-k^2|} |f_k| < \infty$

$\left(\dfrac{k^2}{|2-k^2|} < 2 \quad e \quad \sum |f_k| < \infty \right)$

quindi $g(t) = -\sum \dfrac{k^2 f_k}{2-k^2} e^{ikt}$ è $h''(t)$

inoltre $f = g(t) + \sum \dfrac{2}{2-k^2} f_k e^{ikt} = g + 2h$

(sostituisco nella somma)

quindi $h(t)$ è soluzione di $\overset{||}{h} + 2h = f$

ed è C^3 (infatti f è C^1)

(Meglio usare coi coseni)

Ci sono tantissimi esempi !

Vediamo come si usa per la dip. dai

dati iniziali.

THEOREM. *Let U be an open set in a Banach space $\mathbf{E}$ and let f: $\mathbf{R} \times U \to \mathbf{E}$ be a C^r map $(r \geqq 1)$. Then for each $x_0 \in U$ there exists an open neighborhood V of x_0 in U, an open interval $(-\epsilon, \epsilon)$ about 0 in $\mathbf{R}$ and a map ϕ: $(-\epsilon, \epsilon) \times V \to U$ such that*

(1) *ϕ is C^r;*
(2) *$\phi(0, x) = x$ for $x \in V$;*
(3) *$\dot{\phi}(t, x) = f(t, \phi(t, x))$ for $(t, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times V$.*

qui $E \equiv \mathbb{R}^n$ $\qquad U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = f(t, \phi) \\ \phi(0) = x \end{cases} \qquad \phi = \phi(t, x)$$

quindi qui stiamo dicendo che il flusso è C^r in TUTTE le VARIABILI, almeno in un intorno di $(0, x_0)$

tempo

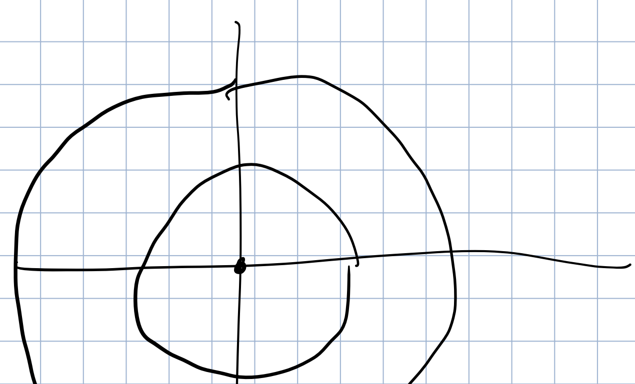
dato iniziale

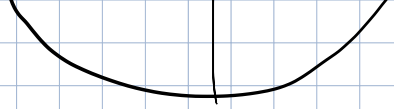
PROOF. We suppose without loss of generality that x_0 is the origin of $\boldsymbol{E}$ and that U is an open ball with center x_0. Take U_0 to be the open ball whose center is x_0 and whose radius is half the radius of U. Let I denote the closed interval $[-1, 1] \subseteq \boldsymbol{R}$. For p an integer $\geqq 0$ let $C^p(I, \boldsymbol{E})$ denote the Banach space of C^p maps from I to $\boldsymbol{E}$ (with the C^p topology), $C_0^p(I, \boldsymbol{E})$ be the (closed) subspace of $C^p(I, \boldsymbol{E})$ consisting of all $\gamma \in C^p(I, \boldsymbol{E})$ with $\gamma(0) = 0$, and $C_0^p(I, U_0)$ the set of all $\gamma \in C_0^p(I, \boldsymbol{E})$ such that $\gamma(I) \subseteq U_0$. Note that $C_0^p(I, U_0)$ is open in the Banach space $C_0^p(I, \boldsymbol{E})$. D denotes the differentiation operator (see [4] or [5]) and D_j denotes partial differentiation with respect to the jth variable.

Let $F\colon \boldsymbol{R} \times U_0 \times C_0^1(I, U_0) \to C^0(I, \boldsymbol{E})$ be the map defined by

$$F(a, x, \gamma)(t) = \dot{\gamma}(t) - af(at, x + \gamma(t))$$

for $a \in \boldsymbol{R}$, $x \in U_0$, $\gamma \in C_0^1(I, U_0)$ and $t \in I$. One easily verifies that F is a C^1 map between Banach spaces. (This is an especially easy instance of the so-called omega theorem of [1]. Note that the map $\gamma \to \dot{\gamma}$ is continuous linear.) ~~The partial derivative with respect to γ at the point $a = 0$, $x = x_0$, $\gamma = 0$ evaluated at the "tangent vector" $\delta \in C_0^1(I, \boldsymbol{E})$ is given by~~





$$\mathcal{F}(a, x, \gamma)(t) = \dot{\gamma} - a f(at, x + \gamma(t))$$

(ho già fatto vedere che $\frac{d}{dt}$ è C^∞,

devo solo guardare l'operatore di Nemitskii

$$\gamma(t) \longrightarrow f(t, x + \gamma(t))$$

(uguale al discorso per $u \longrightarrow u^2$)

$$d_\gamma f(\gamma_0)[h] = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x + \gamma_0)\, h_i(t)$$

$$d_\gamma F(0, x_0, 0)[h] = \dot{h}$$

è invertibile da $C^1_0 \longrightarrow C_0$

applico TFI. $\exists\, (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times V$ intorno di $(0, x_0)$

e una mappa, $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times V \longrightarrow C^1_0(I, U_0)$

$H(a,x)(t)$

$$F(a, x, H(a,x)) = 0$$

$$\phi(t, x) = H(\varepsilon, x)\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + x$$

è C^1 inoltre

$$\dot{H}(t) - a f(at, x + H(t)) = 0 \Rightarrow \dot{H}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - a f\left(a\frac{t}{\varepsilon}, x + H\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t,x) = \frac{1}{\varepsilon}\dot{H} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon f(t,\phi)$$

$\phi' = f(t,\phi)$ soddisfa l'equa diff.

inoltre (Rem $H \in C^1_0$)

$\phi(0,x) = x$.

Quindi per esempio

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = f(\tau, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

per ε suff piccolo (fisso)

$\Phi(x) = \phi(\varepsilon, x)$ è un diffeo in un intorno di ogni x_0.

(sicuramente è iniettivo si tratta di

individuare l'immagine.)

Una maniera conveniente per costruire cambi di coordinate è tramite il flusso a tempo ε di una ODE.
(È la stessa idea delle funzioni generatrici nella meccanica hamiltoniana)

— · — · — · — · — · —