- Spesso non mi interessa tanto la traiettoria ma mi accontento di studiarne il SUPPORTO (l'orbita)

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$(1) \begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

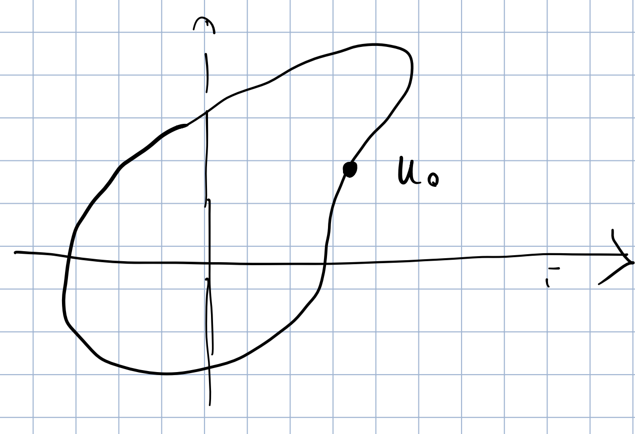
se I è l'intervallo massimale di esistenza

l'orbita di $u(t)$ che risolve (1) è

$$\gamma := \bigcup_{t \in I} u(t)$$

(il supporto della traiettoria)

$u \in \mathbb{R}^2$



REM. I è il più grande intervallo (aperto) contenente t_0 t.c. $u(t)$ risolve l'eq. (1) in I

N.B. Il fatto che $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Non vuol dire che $I = \mathbb{R}$

Esempio 1. $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ s(t) \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{s} = 1 \end{cases}$

$u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

Provate a disegnare le orbite

LEMMA 1 Se $I = (a, b)$ con $b < \infty$

allora deve essere vero che $\lim_{t \to b^-} |u(t)| = +\infty$

questa è una qualche NORMA

allo stesso modo

se $a > -\infty$ allora

$\lim_{t \to a^+} |u(t)| = +\infty$

FARE LA DIMOSTRAZIONE PER ESERCIZIO

REM. $\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$\exists !$ soluzione ; LE TRAIETTORIE NON SI INTERSECANO

SE $u(t_1) = v(t_1)$ allora $u(t) \equiv v(t)$ $\forall t \in I$

Proprietà di gruppo dei sist. autonomi

OSSERVAZIONE:

$\dot{u} = f(u)$ se $u(t)$ è soluzione

anche $u(t+t_0)$ è sol $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

dato $u_0 \in \mathbb{R}^n$ chiamo $\phi(t, u_0)$

l'unica soluzione del IVP

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

LEMMA:

① $v(t) = \phi(t - t_0, u_0)$ risolve

$$\begin{cases} \dot{v} = f(v) \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$$

② $\phi(t+\tau, u_0) = \phi(t, \phi(\tau, u_0))$

Dim. per esercizio.

In un sistema autonomo non importa l'istante iniziale ma solo $t - t_0$!

(ESEMPIO) Il moto di un punto materiale nel campo grav. (costante vicino alla terra) dip. solo da pos. e velocità iniziali non dall'istante iniziale.

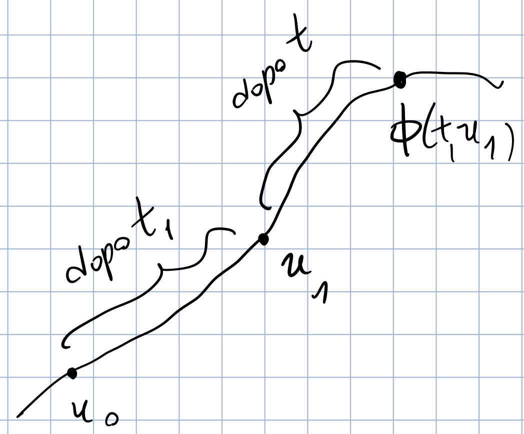
Se invece metto un punto mat. in un fluido (il cui moto dipende dal tempo) la dinamica del punto non dipende solo da pos. e velocità iniziali ma anche dall'istante iniziale.

OSSERVAZIONE:

dato $\dot{u} = f(u)$ come sopra

se $\gamma = \bigcup_{t \in I} \phi(t, u_0)$. preso un qualsiasi punto $u_1 \in \gamma$ (cioé $u_1 = \phi(t_1, u_0)$ per $t_1 \in I$)

$$\phi(t, u_1) = \phi(t + t_1, u_0)$$



DOMANDA 1. Qual è l'intervallo massimale J di esistenza di $v(t)$ soluzione di

$$\begin{cases} \dot{v} = f(v) \\ v(t_0) = u_1 \end{cases}$$

NB. $\left(v(t) = \phi(\underbrace{t + t_1 - t_0}_{= \, \tau \in I}, u_0) \right)$

Risp.

[se $I = (a,b) \Rightarrow J = (a + t_0 - t_1, b + t_0 - t_1)$]

DOMANDA 2. Qual è l'orbita di u_1

$$\gamma_1 := \bigcup_{\tau \in (a - t_1, b - t_1)} \phi(\tau, u_1) \quad ?$$

$[\ \gamma_1 = \gamma\ ]$

Domanda 3.

Date $u(t)$, $v(t)$

soluzione RISP. di

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{v} = f(v) \\ v(t_1) = v_1 \end{cases}$$

POSTO $\gamma =$ orbite di $u(t)$ $\quad \varphi =$ orbite di $v(t)$

è possibile che le due orbite si intersechino ? [SI!]

LEMMA o le due orbite sono disgiunte oppure coincidono.

DIM. per costruzione $u(t) = \phi(t-t_0, u_0)$

e $v(t) = \phi(t-t_1, v_1)$

① dire che si intersecano LE ORBITE

equivale a dire che $\exists\ T_0, T_1$:

$u(T_0) = v(T_1)$ scrivere in termini di ϕ

dimostrare che se $u(T_0) = v(T_1)$ allora

$v_1 \in \gamma$, ma (vedi DOMANDA 2)

$v_1 \in \gamma \Rightarrow v_1 = \phi(\tau_1, u_0) \Rightarrow \gamma \equiv \gamma_1$

TEOREMA di ESISTENZA E UNICITÀ

(Versione di Lindelhof)

Si consideri $\begin{cases} \dot{u} = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

(non faccio direttamente il caso autonomo per mettere le ipotesi minimali di regolarità.

$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua e

Lipschitz in x uniformemente in t

Fissiamo un compatto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

e sia $B_r(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} B_r(x)$

(un "inciccottimento" di Ω)

Fissiamo un intervallo $I_0 \subset \mathbb{R}$

e definiamo M, L in modo che

$$\sup_{(x,t) \in B_r(\Omega) \times I_0} |f(x,t)| \leq M$$

$$\sup_{\substack{x \neq y \in B_r(\Omega) \\ t \in I_0}} |f(x,t) - f(y,t)| \leq L$$

fissiamo T : $MT < r$ $\quad I := (t_0 - T, t_0 + T)$

TESI: $\forall u_0 \in \Omega$ $\exists!$ soluzione $u(t) \in C^1(I, B_r(u_0))$

di (A) $\begin{cases} \dot{u} = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

Dimostrazione:

dato che $u \in C^1(I, B_r(u_0))$ integro

(A) passando alla forma

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau), \tau)\, d\tau \qquad [B]$$

Voglio costruire una successione di

funzioni $u_n(t)$ t.c.

(1) $\forall n \quad u_n \in C(I, B_r(u_0))$

(2) $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy

in $C(I, B_r(u_0))$ rispetto alla norma

$$\|v\|_\infty := \sup_{t \in I} |v(t)|$$

(3) il limite $u(t) = \lim_{n \to \infty} u_n(t)$

risolve l'eq. integrale [B]

ma una funzione continua che risolve [B]

è necessariamente C^1.

In questo modo $u \in C^1(I, B_r(u_0))$

è la soluzione che cercavamo per (A)

Resta da costruire la successione

$u_n(t)$

$u_0(t) = u_0 \quad \forall\, t \in I$ (funzione costante)

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u_0, \tau)\, d\tau$$

$\vdots$

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u_{n-1}(\tau), \tau)\, d\tau$$

Dimostriamo per induzione che vale (1)

$u_n \in C(I, B_r(u_0)) \quad \forall\, n$

- Vero per $n = 0$ ✓
- se $u_{n-1} \in C(I, B_r(u_0))$ allora

$u_n(t)$ è continua $\forall\, t \in I$ (comp. di funzioni continue)

e $u_n(t) \in B_r(u_0) \quad \forall\, t \in I$

dato che $$|u_n(t) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(u_{n-1}(\tau), \tau)\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(u_{n-1}(\tau), \tau)|\, d\tau \right|$$

$$\leq T \sup_{\tau \in I} |f(u_{n-1}(\tau), \tau)|$$

(dato che $u_{n-1}(\tau) \in B_r(x_0)$)

$$\leq T \sup_{\substack{x \in B_r(x_0) \\ \tau \in I}} |f(x, \tau)|$$

$$\leq TM \leq r \qquad \text{(per ipotesi)}$$

Per far vedere ② due possib.

- (Picard) aggiungere l'ipotesi $LT < 1$

- (Lindelhof) dimostrare per induzione

che $\forall\, t \in I$

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq L^{n-1} \frac{|t-t_0|}{n!} M$$

(faccio a mano i primi 2 passi x verifica

$n=1$

$$|u_1(t) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(u_0,\tau)\, d\tau \right| \leq M|t-t_0| \quad \checkmark$$

$n=2$

$$|u_2(t) - u_1(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(u_1(\tau),\tau) - f(u_0,\tau)|\, d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\,|u_1(\tau) - u_0|\, d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} LM|\tau-t_0|\, d\tau \right|$$

$$\leq LM \frac{|t-t_0|^2}{2}$$

per induzione

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(u_n(\tau),\tau) - f(u_{n-1}(\tau),\tau)|\, d\tau \right|$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} L\,|u_n(\tau) - u_{n-1}(\tau)|\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \left(L^{n-1} M \frac{|\tau - t_0|^n}{n!} \right) d\tau \right|$$

$$\leq L^n M \int_{t_0}^{t} \frac{|\tau - t_0|^n}{n!} d\tau = L^n M \frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left(\text{se } \underset{\tau > t_0}{\overset{t > t_0}{\shortparallel}} \quad \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n d\tau = \int_0^{t-t_0} z^n dz \right)$$

identico se $t < t_0$.

Ora $\sup\limits_{t \in I} |u_n(t) - u_m(t)| =: \|u_n - u_m\|_\infty$

$$\leq \sum_{J=n+1}^{m} \|u_J - u_{J-1}\|_\infty$$

$$\leq \frac{M}{L} \sum_{J=n+1}^{\infty} \frac{(LT)^J}{J!}$$

ora $\displaystyle\sum_{J=0}^{\infty} \frac{(LT)^J}{J!} = e^{LT}$ converge totalm. con

raggio di convergenza $= \infty$

quindi $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) : \displaystyle\sum_{J=n+1}^{\infty} \frac{(LT)^J}{J!} < \varepsilon \quad \forall n > N$

Rem $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy se $\forall\, \varepsilon > 0$

$\exists\, N(\varepsilon) : \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon)$ allora

$\| u_n - u_m \|_\infty < \varepsilon$

segue che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy

lo spazio delle funzioni $C(I, B_r(x_0))$

è di Banach (succ di Cauchy $\Leftrightarrow$ convergenti)

quindi $u := \lim_{n\to\infty} u_n \in C(I, B_r(u_0))$

inoltre $\quad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u_n(\tau),\tau)\, d\tau$

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) = u_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(u_n(\tau),\tau)\, d\tau$$

$$= u_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(u_n(\tau),\tau)\, d\tau$$

$$= u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau),\tau)\, d\tau$$

Infatti

f è continua, quindi $f(u_n(\tau),\tau)$ converge uniformemente in I a $f(u(\tau),\tau)$ e posso portare il $\lim\limits_{n\to\infty}$ dentro all'integrale.

Ho dimostrato che $u(t)$ risolve (B)

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau),\tau)\, dt$$

ma il lato destro è C^1

(Teorema fond. del calcolo integrale)

quindi $u \in C^1$ ed è soluzione di (A)

$\blacksquare$