I° teorema astratto di Hopf.

Consideriamo $\mathcal{F}(\lambda,\mu,u) \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E, F)$

della forma

$$\mathcal{F}(\lambda,\mu,u) = L(\lambda,\mu)[u] + Q(\lambda,\mu,u)$$

dove:

1. $\forall(\lambda,\mu) \quad L(\lambda,\mu) \in \mathcal{L}(E,F)$

(è un operatore lineare continuo)

2. $Q(\lambda,\mu,\varepsilon u) = \varepsilon^2 \tilde{Q}(\lambda,\mu,u,\varepsilon)$

(Q ha uno zero di ordine ≥ 2 in u

es. u^2+u^3)

Verificare che

In questo modo:

(A) $\mathcal{F}(\lambda,\mu,0) = 0 \qquad \forall \lambda,\mu$

(B) $d_u\mathcal{F}(\lambda,\mu,0)[h] = L(\lambda,\mu)[h]$

(N.B. dato che $\mathcal{F}$ e L sono C^1 lo sono anche Q e $\widetilde{Q}$)

— . — . — . —

Fissiamo $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\dim(\operatorname{Ker} L(\lambda_0, \mu_0)) = 2$$

Supponiamo che si possa seguire la decomposizione di Lyapunov-Schmidt

$$E = V \oplus W \quad ; \quad F = Z \oplus R$$

(con $\dim(Z) = 2$ e $R = \operatorname{Range} L_{\lambda_0, \mu_0}$

e $L(\lambda_0, \mu_0)\ W \to R$ è invertibile

— . — . — . —

Dimostrare che se

$\exists\, \bar{v} \in V$ tale che $\Pi_Z \frac{\partial}{\partial \mu} L(\lambda_0, \mu_0)[\bar{v}]$

e $\Pi_Z \frac{\partial}{\partial \lambda} L(\lambda_0, \mu_0)[\bar{v}]$ sono independent allora $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ e una mappa C^1

$$\varepsilon \to (\lambda(\varepsilon), \mu(\varepsilon), u(\varepsilon))$$

$[-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ che risolve

$$\mathcal{F}(\lambda, \mu, u) = 0$$

Sugg:

(seguire lo schema dell'esempio)

porre $u = \varepsilon \underset{\substack{\cap \\ V}}{\bar{v}} + \varepsilon \underset{\substack{\cap \\ W}}{r}$