Equazioni differenziali di ordine d.

l'incognita è una funzione $u: I \to \mathbb{R}^n$

DERIVABILE (almeno) d volte

L'EQ. DIFF. lega $\forall\ t \in I$

(intervallo di esistenza) $u(t)$ alle sue derivate

fino all'ordine d.

$$F: \mathbb{R}^{nd+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(u(t), \dot u(t), \ddot u(t), \dots u^{(d)}(t), t) \equiv 0 \quad \forall\ t \in I$$

$u(t)$ si chiama soluzione CLASSICA dell'EQ.

Equazione in forma NORMALE

$$u^{(d)}(t) = G(u(t), \dot u(t), \dots u^{(d-1)}(t), t)$$

Naturalmente se F è globalmente esplicitabile rispetto a $u^{(d)}$ allora posso sempre scriverla in forma NORMALE

Esempio

(A) $\dot u^2 + u^2 = 1$ due rami $\dot u = \sqrt{1-u^2}$

$\dot u = -\sqrt{1-u^2}$

$$\begin{cases} \dot u^2 + u^2 = 1 \\ u(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \dot u(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(ramo positivo)

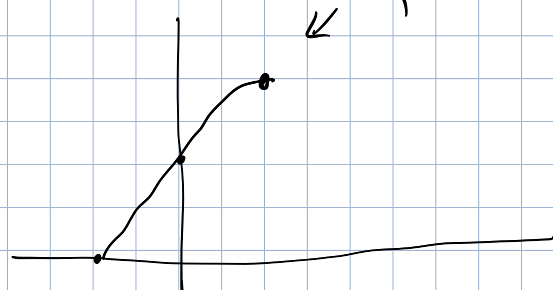
$$\begin{cases} \dot u = \sqrt{1-u^2} \\ u(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(la cond. su $\dot u(0)$ serve solo per scegliere il ramo)

Sep. di Variabili

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{u(t)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = t \quad \Rightarrow \quad u(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

qui la soluzione Non è unica



Esercizio: discutere in quali modi si può prolungare la soluzione

Pensate a un problema di meccanica in cui sapete che si conserva l'energia!

ho una eq. DIFF non in forma NORMALE!

DOMANDA: che moto sto studiando in (A)?

NOI CI CONCENTRIAMO SU

SISTEMI AUTONOMI del 1 ORDINE

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(IVP o ODE)

Tipicamente assumeremo che f è per lo meno C^1 in modo da garantire esistenza e unicità.

TRUCCO: come passare da una eq. diff. di ordine d NON AUTONOMA ad una ODE del 1 ORDINE

$$\begin{cases} x^{(d)}(t) = G(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(d-1)}(t), t) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \quad \ddot{x}(t_0) = a_0, \dots \end{cases}$$

pongo $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t) \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{d-1}(t) \\ u_d(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{u}_0 = u_1$$

$$\dot{u}_1 = u_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{u}_{d-1} = G(u_0, \dots u_{d-1}, u_d) \iff \dot{u} = f(u) \;!$$

$$\dot{u}_d = 1$$

Ovviamente così devo lavorare in dimensione + alta $(d+1)$ inoltre potrei perdere di vista la linearità in x.

Esempi $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ (B)

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad \dot{u} = a(u_2)\, u_1 + b(u_2)$$

partivo lineare in x MA ora non è lineare in u

DOMANDA: se $a(t)$ e $b(t)$ sono CONTINUE bastano a risolvere (B)?

Scopo del corso è studiare le ODE 1°

- Esistenza - unicità - tempi massimali di $\exists$
Teorema di Picard, di Cauchy Kovalevski (di Peano?)
- Dipendenza dai dati iniziali (Gronwall)
- Analisi qualitativa delle orbite
- Teorema di RETTIFICAZIONE
- Analisi lineare vicino a un punto fisso (esponenziale di matrice)

- Studio di soluzioni periodiche vicino ad un punto fisso stabile
(Teoremi di Biforcazione)

- Studio delle orbite vicino a un punto fisso iperbolico teorema di Hartmann forma normale di Birkhoff

— · —

Non passeremo molto tempo a trovare soluzioni esplicite (tranne come esempi) ma piuttosto studieremo "proprietà qualitative"

Il motivo in parte è pratico
(di pochissime equazioni so trovare soluzioni esplicite) in parte filosofico

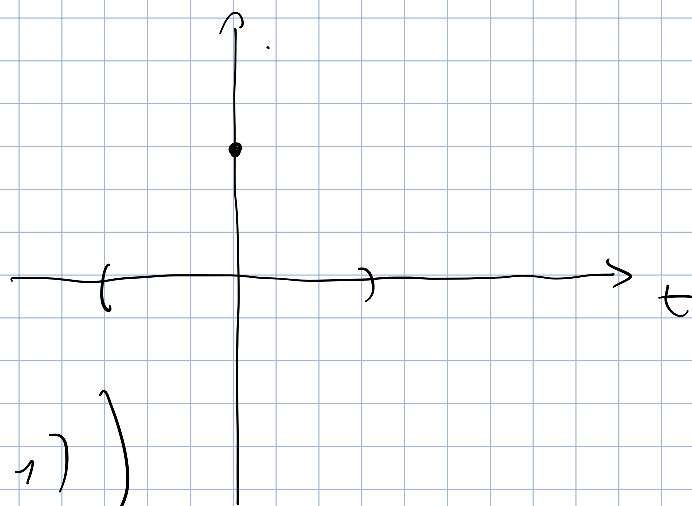
Il punto di vista più classico è di risolvere esplicitamente e se non trovo una soluzione in termini di funzioni elementari

definire una funzione speciale

per esempio potrei definire

$m(t) : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ unica soluzione

di $\begin{cases} m' = m + m^5 \\ m(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$



(ovviamente dovrei far vedere che l'intervallo di esistenza contiene $(-1,1)$)

Se $m(t)$ NON si esprime in termini di funzioni già note posso darle un nome

IN REALTÀ SO RISOLVERE:

$$m(t) = x(t)\, e^{t}$$

$$m' = x' e^{t} + x e^{t} = x e^{t} + x^5 e^{5t}$$

quindi $\quad x' = x^5 e^{4t}$

separazione di variabili

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dz}{z^5} = \frac{1}{4} e^{4t}$$

$$\frac{1}{4x_0^4} - \frac{1}{4x^4} = \frac{1}{4} e^{4t}$$

$$\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x_0^4} - e^{4t} \qquad x(t) = \frac{x_0}{\sqrt[4]{1 - x_0^4 e^{4t}}}$$

$$m(t) = \frac{e^t}{\sqrt[4]{3^4 - e^{4t}}}$$ FUNZIONE GIÁ NOTA!

— · — · —

Supponiamo anche di saper risolvere esattamente una ODE

- Se viene da un problema fisico sicuramente è frutto di una approssimazione (DOMANDA: per quanto tempo le soluzioni della mia ODE restano vicine al sistema vero?)

- Anche il dato iniziale si conosce

solo approssimativamente

(DOMANDA! Cosa succede se cambio di poco il dato iniziale?)

- Spesso non mi interessa tanto la traiettoria ma mi accontento di studiarne il SUPPORTO (l'orbita)

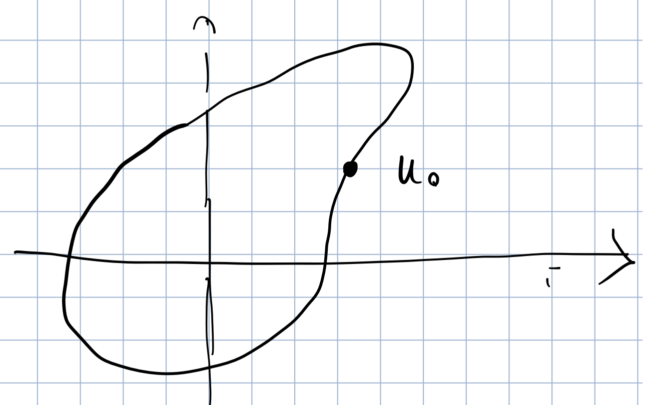
$$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$① \begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

se I è l'intervallo massimale di esistenza

l'orbita di $u(t)$ che risolve ① $u \in \mathbb{R}^2$

è $\bigcup_{t \in I} u(t)$



REM. I è il più grande intervallo (aperto) contenente t_0 t.c. $u(t)$ risolve l'eq. ① in I

N.B. Il fatto che $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Non vuol dire che $I = \mathbb{R}$

Esempio $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ s(t) \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{s} = 1 \end{cases}$

$u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

Provate a disegnare le orbite

Oss. Se $I = (a, b)$ con $b < \infty$

allora deve essere vero che $\lim_{t \to b^-} |u(t)| = +\infty$

questa è una qualche NORMA

allo stesso modo

se $a > -\infty$ allora

$\lim_{t \to a^+} |u(t)| = +\infty$

FARE LA DIMOSTRAZIONE PER ESERCIZIO

Proprietà di gruppo dei sist. autonomi

$\dot{u} = f(u)$ se $u(t)$ è soluzione

anche $u(t+t_0)$ è sol $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

dato $u_0 \in \mathbb{R}^n$ chiamo $\phi(t, u_0)$

l'unica soluzione del IVP

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

allora

1. $v(t) = \phi(t - t_0, u_0)$ risolve

$$\begin{cases} \dot{v} = f(v) \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$$

② $\phi(t+\tau, u_0) = \phi(t, \phi(\tau, u_0))$

Dim. per esercizio.

Domanda:

Date $u(t)$, $v(t)$

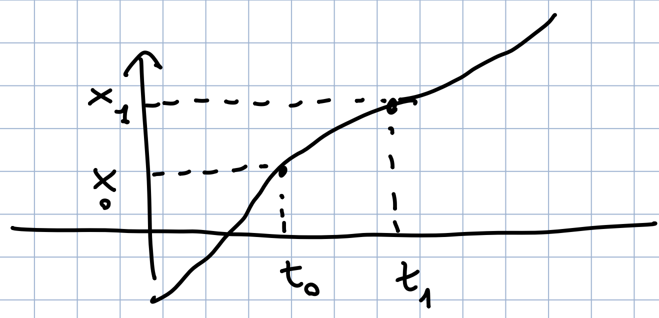
soluzione RISP. di

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{v} = f(v) \\ v(t_1) = u_1 \end{cases}$$

è possibile che le due orbite si intersechino? (certo che sì)

ESEMPIO:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



l'orbita $\Leftrightarrow$ graf$(x(t))$

LEMMA. per un sistema autonomo.
o le due orbite sono disgiunte

oppure coincidono

Suggerimento: $u(t) = \phi(t - t_0, u_0)$

$v(t) = \phi(t - t_1, u_1)$ dire che le orbite si intersecano vuol dire che

$\exists\, T_0, T_1 \;:\; u(T_0) = v(T_1)$

$$\phi(T_0 - t_0, u_0) = \phi(T_1 - t_1, u_1)$$

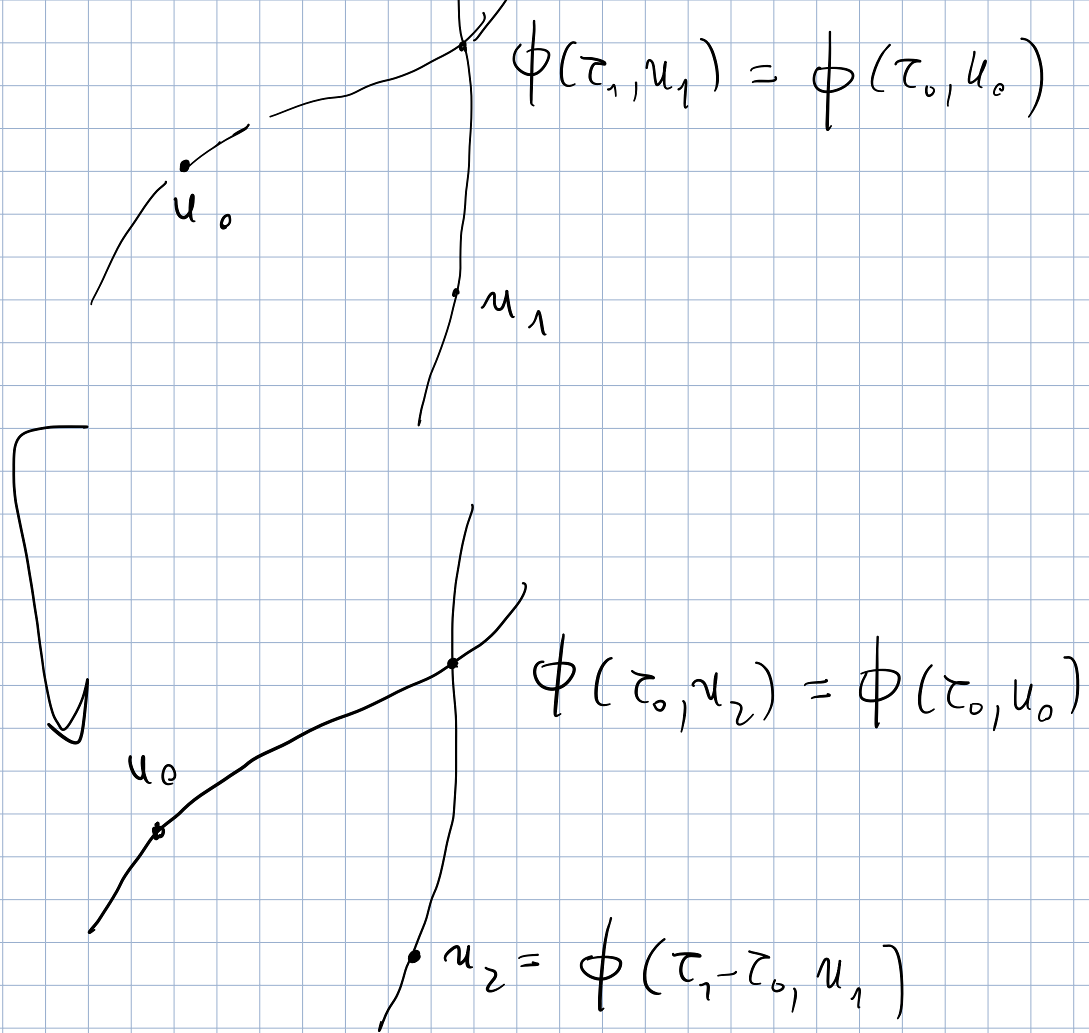
chiamo $\tau_0 := T_0 - t_0 \qquad \tau_1 = T_1 - t_1$

$$\phi(\tau_0, u_0) = \phi(\tau_1, u_1)$$

$\parallel$ prop. Gruppo

$$\phi(\tau_0, \phi(\tau_1 - \tau_0, u_1))$$

ho scritto una uguaglianza fra due traiettorie ALLO STESSO TEMPO



LE TRAIETTORIE PASSANO PER LO STESSO PUNTO allo STESSO TEMPO

Possibile solo se $u_2 = u_0$!

(per l'unicità delle soluzioni!)

Se $u_2 = u_0$ vuol dire che

$$u_0 = \phi(\tau_1 - \tau_0, u_1)$$

quindi u_0 appartiene all'orbita di $v(t)$)

ora l'orbita $\bigcup_{I} u(t) =$

$\bigcup_{I} \phi(t-t_0, \phi(\tau_1-\tau_0, u_1)) =$ (sempre gruppo)

$\bigcup_{I} \phi(t-t_0+\tau_1-\tau_0, u_1) \equiv$ orbita di v $\blacksquare$

$\bigcup_{\tau \in I - t_0+\tau_1-\tau_0} \phi(\tau, u_1)$