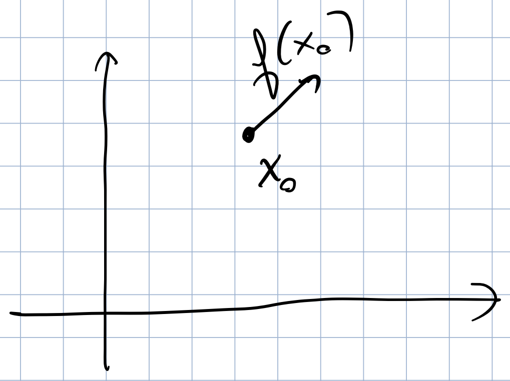
Rettificazione di Poincaré



Studio le traiettorie di

$$\dot{x} = f(x)$$

vicino a x_0 t.c.

$$f(x_0) \neq 0$$

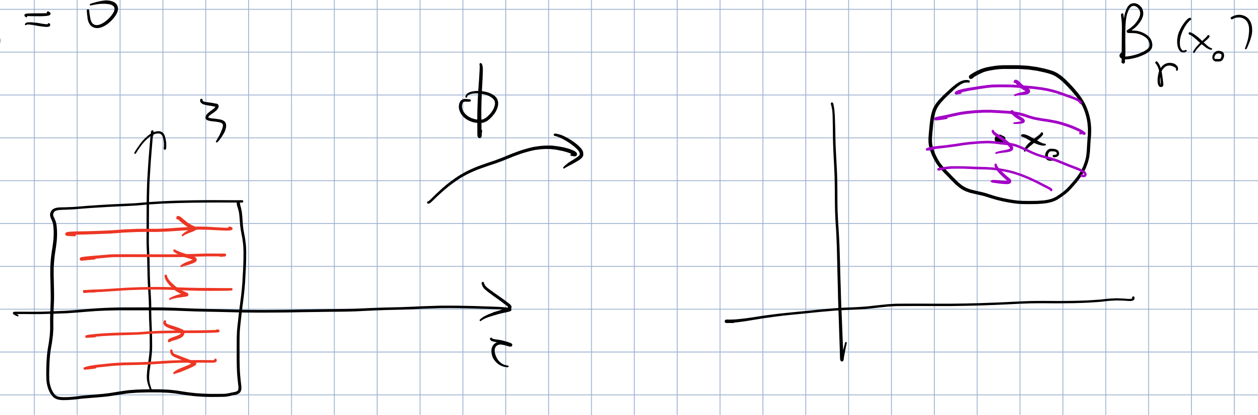
$\exists$ cambiamento di coord C^1 invertibile con inversa C^1 (definito in una piccola palla $B_r(x_0)$)

$$x \xleftarrow{\Phi} \tau, \xi \qquad (\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$B_r(x_0) \longleftarrow D \longrightarrow \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \quad |\xi| < \delta$$

$\dot{x} = f(x)$ nelle coord. (τ, ξ) diventa

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \\ \dot{\xi} = 0 \end{cases}$$



le traiettorie sono vicine a dei moti rettilinei uniformi.   Rem se $x' = f(x)$ e $x = \phi(y)$

allora $y' = (J\phi(y))^{-1} f(\phi(y))$ è la ODE

nelle nuove variabili

DIFFEOMORFISMI

fissata una piccola palla $B_r(x_0)$

$(f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$

considero $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = y \end{cases}$ $\boxed{\text{per } y \in B_r(x_0)}$

so che il flusso $\phi(\tau, y)$ è C^1 in tutte

le variabili per $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $y \in B_r(x_0)$

fisso τ_0 piccolo e considero la

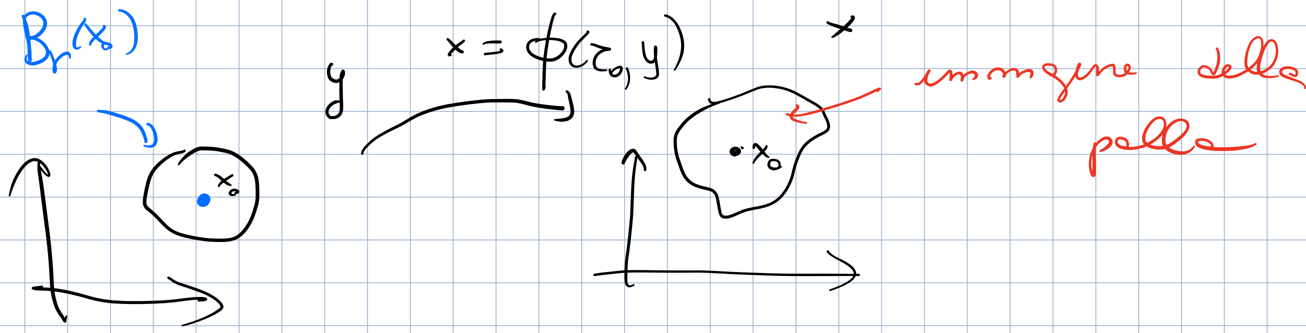
mappa $\boxed{y \longrightarrow x = \phi(\tau_0, y)}$

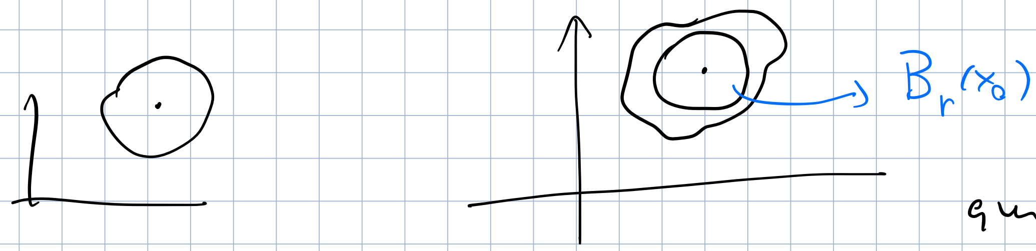
definita per $y \in B_r(x_0)$; C^1 e iniettiva

Tale mappa è invertibile

e $y = \phi(-\tau_0, x)$ per $x \in B_r(x_0)$

l'inversa è C^1 !





qui sono sicuro che l'inversa è C^1

Quindi usare i flussi di una ODE per generare cambiamenti di coordinate C^1 invertibili con inversa C^1 è ESTREMAMENTE utile

Esempio cretino

Se voglio costruire un cambiamento di coord. lineare invertibile da $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ basta prendere una qualsiasi matrice 5×5 (la chiamo M)

e^M è invertibile e l'inverso

è e^{-M} !

se voglio un cambiamento ortogonale

e^A con A antisimmetrica

La domanda fondamentale delle

Forme Normali

Data una ODE $(V \in C^1)$

$x' = V(x)$ e un diffeo

$x = \phi(\tau_0, y)$ dove $\phi(\tau, y)$ risolve

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{d\tau} = f(\phi(\tau, y)) & (f \in C^1) \\ \phi(0, y) = y \end{cases}$$

(e τ_0 è piccolo in modo che $y \to \phi(\tau_0, y)$

sia C^1 su $B_r(x_0)$)

Voglio riscrivere la ODE $\frac{dx}{dt} = V(x)$

nelle coordinate y, cioè $x = \phi(\tau_0, y)$

Implica

$$\frac{dy}{dt} = \left(J_y\phi(\tau_0,y)\right)^{-1} V\left(\phi(\tau_0,y)\right) =: W(y)$$

E cercare ϕ in modo che $W(y)$ sia

PIÙ SEMPLICE POSSIBILE !

Dato ϕ, il nuovo campo vettoriale $W = \phi_* V$

si chiama il pull back del campo $V(x)$

$$x \qquad y \xrightarrow{\phi} x$$

allora

$$V(x) \xrightarrow{\phi_*} W(y)$$

$$x = \phi(y) \Rightarrow W(y) = (J\phi(y))^{-1} V(\phi(y))$$

in modo che le soluzioni

$x(t)$ di $\dot{x} = V(x)$ sono

$\phi(y(t))$ dove $y(t)$ Risolve $\dot{y} = W(y)$

però se NON conosco $\phi(\tau_0, y)$ NON posso scrivere il nuovo campo vettoriale

Voglio un MODO (almeno iterativo) per calcolare W senza conoscere ϕ !

definiamo il COMMUTATORE

vettore

$$[f(x), V(x)] := \sum f_s \frac{\partial V}{\partial x_s} - V_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

(Nota bene è un campo vettoriale

$x \to [f(x), V(x)] \in \mathbb{R}^n$)

$$[f, V] = (JV)f - (Jf)V$$

Teorema (esponenziale di Lie)

Se la serie di Lie è

BEN DEFINITA e tot. convergente

$$W(y) = \exp\left([f(y), \cdot\,]\, \tau_0\right) V(y)$$

dove $\exp(\tau_0 [f(y), \cdot\,]) = \sum_k \tau_0^k \dfrac{\overbrace{[f, [f, \dots [f, \cdot\,]]]}^{k \text{ volte}}}{k!}$

(N.B. se f è solo C^n NON posso fare troppi commutatori! Idem se V è solo C^n!)

$$\boxed{\text{Voglio che converga} \quad \sum_k \frac{\tau_0^k}{k!} \sup_{y \in B_r(x_0)} \Big| \overbrace{[f, [f, [\dots [f, V]]]]}^{k \text{ volte}} \Big|}$$

Dimostrazione:

Considero la famiglia a un parametro

$$W(\tau,y) := \left(J_y\phi(\tau,y)\right)^{-1} V(\phi(\tau,y))$$

per $\tau \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

dove $\phi(\tau,y)$ risolve $\begin{cases} \dfrac{d\phi}{d\tau} = f(\phi) \\ \phi(\tau=0) = y \end{cases}$

CHE ODE RISOLVE W?

Se dimostro che è

$$(*) \begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} W(\tau,y) = [f(y), W(\tau,y)] \\ W(0,y) = V(y) \end{cases}$$

allora ho fatto

(infatti per unicità

$$W(\tau, y) = e^{\tau [f(y), \cdot]} V(y)$$

se la serie converge totalmente

Quindi voglio dimostrare che vale *

$$\frac{d}{d\tau} W(\tau, y) = \frac{d}{d\tau} \left[(J_y \phi(\tau, y))^{-1} V(\phi(\tau, y)) \right]$$

$$= -(J_y \phi(\tau, y))^{-1} \left(J_y \frac{d}{d\tau} \phi(\tau, y) \right) (J_y \phi(\tau, y))^{-1} V$$

$$+ (J_y \phi(\tau, y))^{-1} J_x V(\phi(\tau, y)) \frac{d}{d\tau} \phi =$$

$$= -(J_y \phi(\tau, y))^{-1} J_y (f(\phi(\tau, y)) (J_y \phi(\tau, y))^{-1} V(\phi(\tau, y))$$

$$+ (J_y \phi(\tau, y))^{-1} J_x V(\phi(\tau, y)) f(\phi(\tau, y)) =$$

$$= -(J_y \phi(\tau, y))^{-1} J_x f(\phi(\tau, y)) V(\phi(\tau, y)) +$$

$$(J_y \phi(\tau, y))^{-1} J_x V(\phi(\tau, y)) f(\phi(\tau, y))$$

$$= (J_y \phi(\tau, y))^{-1} (J_x V f - J_x f V)_{x = \phi(\tau, y)}$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W(\tau, y) = \phi_{*}(\tau)\left([f, V] \right)$$

$\left(\text{Rem } \partial_\tau \phi = f(\phi) \right)$

Modo alternativo per vederlo:

<u>Trucco</u>: ricordo che $\phi(0, y) = y$

$$\partial_\tau W \Big|_{\tau=0} = - J_x f(x) V(x) + J_x V(x) f(x) \Big|_{x=y}$$

$$= [f, V](y)$$

ricordo anche che $\phi(\tau_0 + s, y) =$

$$\phi(s, \phi(\tau_0, y))$$

e quindi

$$W(\tau_0 + s, y) = \left(J_y \phi(\tau_0 + s, y) \right)^{-1} V(\phi(\tau_0 + s, y))$$

$$= \left(J_y (\phi(s, \phi(\tau_0, y))) \right)^{-1} V(\phi(s, \phi(\tau_0, y))$$

$$= \left(J_z \phi(s, \phi(\tau_0, y)) J_y \phi(\tau_0, y) \right)^{-1} V(\phi(s, \phi(\tau_0, y)))$$

$$= \left(J_y \phi(\tau_0, y)\right)^{-1} \left(J_z \phi(s,z)\, V(\phi(s,z)) \right)\Big|_{z=\phi(\tau_0,y)}$$

$$= \left(J_y \phi(\tau_0,y)\right)^{-1} W(s,z)\Big|_{z=\phi(\tau_0,y)}$$

$$W(\tau_0+s, y) = \left(J_y \phi(\tau_0,y)\right)^{-1} W(s, \phi(\tau_0,y))$$

quindi

$$\partial_\tau W(\tau,y)\Big|_{\tau=\tau_0} = \partial_s W(\tau_0+s, y)\Big|_{s=0}$$

$$= \left(J_y \phi(\tau_0,y)\right)^{-1} \partial_s W(s, \phi(\tau_0,y))\Big|_{s=0}$$

$$= \left(J_y \phi(\tau_0,y)\right)^{-1} \left[f(z), V(z) \right]\Big|_{z=\phi(\tau_0,y)}$$

quindi $\quad \partial_\tau W(\tau,y) = \phi_*(\tau)\left([f,V] \right)$ $\blacksquare$

LEMMA. (doloroso)

$$\phi_*([f,V]) = [\phi_* f, \phi_* V]$$

quindi $\quad \partial_\tau W(\tau,y) = [\Phi_x(\tau) f, W(\tau,y)]$

(rem. $W = \Phi_x(\tau) V$)

resta solo da determinare

$$\Phi_x(\tau) f =: F(\tau,y)$$

sappiamo (dal conto di prima con $V=f$)

$$\begin{cases} \partial_\tau F(\tau,y) = \Phi_x(\tau)([f,f]) = 0 \\ F(0,y) = f(y) \end{cases}$$

quindi $F(\tau,y) = f(y)$ ho dimostrato

$$\partial_\tau W(\tau,y) = [f(y), W(\tau,y)] \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione del Lemma doloroso

se ψ un diffeomorfismo e f, g due campi vettoriali allora

$$\psi_* [f, g] = [\psi_* f, \psi_* g]$$

(cioé il commutatore di campi vettoriali è una op. naturale rispetto ai cambi di coordinate)

N. B se $\phi(\tau, y)$ è il flusso di f e $\xi(t, y)$ è quello di g

$$[f, V] = \frac{\partial}{\partial \tau} g(\phi(\tau, y)) - \frac{\partial}{\partial t} f(\xi(t, y)) \Big|_{t=\tau=0}$$

$$(\psi_* f) = (J\psi)^{-1} f \circ \psi$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(\psi_* f) = -(J\psi)^{-1} \frac{\partial J\psi}{\partial y_i} \big[(J\psi)^{-1} (f \circ \psi) \big) + (J\psi)^{-1} (J_x f \circ \psi) \frac{\partial \psi}{\partial y_i}$$

$$J(\psi_* f)\, h = -\sum_i (J\psi)^{-1} \frac{\partial J\psi}{\partial y_i} h_i \, (J\psi)^{-1} (f\circ\psi)$$

$$+ (J\psi)^{-1} (J_x f \circ \psi)\, J\psi\, h$$

$$J(\psi_* f)\, \psi_* g =$$

$$\overbrace{- \sum_i (J\psi)^{-1} \frac{\partial J\psi}{\partial y_i} \left[(J\psi)^{-1} g\circ\psi \right]_i (J\psi)^{-1} f\circ\psi}^{1}$$

$$+ (J\psi)^{-1} (J_x f \circ \psi) \cancel{(J\psi)} \cancel{(J\psi)^{-1}}\, g\circ\psi$$

$$= 1 + (J\psi)^{-1} (J_x f\, g)\circ\psi$$

$$J(\psi_* g)\psi_*(f) = (2) + (J\psi)^{-1} (J_x f\, g)\circ\psi$$

(2) $\Rightarrow$ (1) in cui scambio f e g

ORA (2) = (1) e i termini si cancellano

$$A = (J\psi)^{-1} \quad ; \quad B = J\psi \quad \leftarrow \text{matrici}$$

$$A\, g\circ\psi = v \quad ; \quad A\, f\circ\psi = w \quad \leftarrow \text{vettori}$$

$$① = \sum_{k,k_1,i} A_{hk} \frac{\partial B_{kk_1}}{\partial y_i} V_i W_{k_1}$$

va confrontato con

$$② = \sum_{k,j,k_2} A_{hk} \frac{\partial B_{kk_2}}{\partial y_j} V_{k_2} W_j \qquad \left(\begin{array}{l} j = k_1 \\ k_2 = i \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k,k_1,i} A_{hk} \frac{\partial B_{ki}}{\partial y_{k_1}} V_i W_{k_1}$$

mi serve quindi di dimostrare che:

$$\frac{\partial B_{kk_1}}{\partial y_i} = \frac{\partial B_{ki}}{\partial y_{k_1}}$$

$$\frac{\partial B_{kk_1}}{\partial y_i} = \frac{\partial \phi_k}{\partial y_{k_1} \partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_{k_1}} \frac{\partial}{\partial y_i} \phi_k \qquad \blacksquare$$

Esercizio prendiamo due

campi vettoriali LINEARI

$f(x) = Ax \qquad g(x) = Bx$

calcolare $[f, g]$

se $\phi(\tau, y)$ il flusso di $\begin{cases} x_\tau = f(x) \\ x(0) = y \end{cases}$

e se $\psi(y) = \phi(1, y)$

① far vedere che ψ è un diffeomorfismo (scrivere ψ esplicitamente)

② Determinare

$(\phi(\tau))_* g$ e $\psi_* g$