$$\dot{x} = A(t)\, x \qquad x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

$$A(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathrm{mat}(n \times n))$$

→ se $n = 1$ si risolve a mano:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)\, x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \quad x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\, x_0$$

(verifica diretta)

se $n > 1$ NON si sa scrivere una soluzione generale però si sa che

Lemma: lo spazio delle soluzioni di 1 è uno spazio vettoriale di dimensione n.

(per la dim vedere dopo)

conviene vedere il problema tramite una ODE matriciale

cerco $t \to W(t)$

$I \to \mathrm{mat}(n \times n)$

soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{W} = A(t)\, W \\ W(t_0) = \mathbb{1} \end{cases}$$

(attenzione alla moltiplicazione a sinistra)

per il teorema di esistenza e unicità locale: $W(t)$ esiste (almeno localmente)

ora consideriamo $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$x(t) := W(t)x_0$ è soluzione!

(per il teorema di $\exists !$ questa è l'unica soluzione)

le colonne della matrice W formano una base per le soluzioni!

le colonne di W risolvono $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = \underline{e}_j \end{cases}$ j-me colonne

$W(t)$ si chiama la matrice fondamentale

(a volte MATRICE WRONSKIANA)

il suo determinante è il Wronskiano.

LEMMA det $W(t) \neq 0$ per ogni t

infatti se $\det W(t_1) = 0 \Rightarrow \exists\, \bar{x} \neq 0 : W(t_1)\bar{x} = 0$

(il Ker non è banale) ma allora il

problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_1) = 0 \end{cases}$

ammette 2 soluzioni $x(t) = 0$ e

$x(t) = W(t)\bar{x}$ ASSURDO!

LEMMA) $W(t)$ è definita $\forall t \in \mathbb{R}$)

dim: le colonne di $W(t)$ sono le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = \underline{e}_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

mettiamoci in un qualsiasi intervallo chiuso $[a,b]$ e chiamiamo I_{max} l'intervallo massimale di esistenza

dato che $t \to A(t)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$

$$\boxed{\sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\|^{op} \leq C < \infty}$$

ora guardiamo $\frac{d}{dt}|x| = \frac{(x, A(t)x)}{|x|} \Rightarrow$ forma integrale

$$|x(t)| = |x_0| + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}, A(\tau)x(\tau) \right) d\tau \quad \text{in } I_{max}$$

quindi fino a che $t \in [a,b] \cap I_{max}$

$$|x(t)| \leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^{t} C|x(\tau)| \, d\tau \right|$$

cioè $|x(t)| \leq |x_0| e^{C|t-t_0|}$ $(x_0 = e_j !)$

ma questo è assurdo (credo in un compatto) a meno che non sia $[a,b] \subset I_{max}$

dall'arbitrarietà di $[a,b]$ si ha $I_{max} = \mathbb{R}$

Sistemi non omogenei

Variazione di costanti

$$② \begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $A(t) \in C(\mathbb{R}, \text{mat } n\times n)$

$b(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

Costruisco la soluzione di (2)

ponendo $x(t) = W(t)\, y(t)$

(cambio di variabile dipendente dal tempo)

$W(t)$ è la MATRICE FONDAMENTALE

$$\begin{cases} W' = AW \\ W(t_0) = \mathbb{1} \end{cases} \qquad x' = W' y + W y' = A x + b$$

$$\Downarrow$$

$$y' = W(t)^{-1} b(t) \quad \Longleftarrow \quad A W y + W y' = A W y + b$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau) b(\tau)\, d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau) b(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \underbrace{W(t) x_0}_{\text{soluzione della omogenea}} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{W(t)\, W^{-1}(\tau)}_{\text{propagatore}}\, b(\tau)\, d\tau$$

→ Equazioni a coeff. costanti

Data una matrice A (numerica)

definisco $e^{A} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

questa è una serie totalmente convergente rispetto alla NORMA OPERATORIALE

con raggio di convergenza $= \infty$.

REM.

$$\|M\|^{op} := \sup_{|\vec{v}| \le 1} |M\vec{v}|$$

in modo che $|M\vec{v}| \le \|M\|^{op} |\vec{v}|$

REM. $\sum b_k A^k$ con $A \in mat(n \times n)$

converge totalmente per $\|A\|^{op} < R$

se $\forall\ r < R$ $\sum |b_k| r^k < \infty$

$$\left(\frac{1}{R} = \lim \sqrt[k]{|b_k|} \right)$$

Lemma: se A e B commutano allora

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Dim $(A+B)^k = \sum \binom{n}{k} A^n B^{k-n}$

se A e B commutano $\Rightarrow$ stesse regole

dell'esponenziale di numeri. ■

quindi $\forall\, A \in mat(n \times n)$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$

posso definire $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$

per i teoremi sulla derivabilità delle serie

totalmente convergenti

LEMMA: $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$

Ecco una dimostrazione a meno $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{e^{At} - e^{At_0}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} e^{At_0} \frac{\left(e^{A(t-t_0)} - \mathbb{I}\right)}{t - t_0}$$

ora pongo $t - t_0 = h \to 0$

$$\frac{e^{Ah} - \mathbb{I}}{h} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ah)^k}{k!}$$

$$= A + h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k h^{k-2}}{k!}$$

ma dato che nella seconda somma $k \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} h^{k-2} \leq \sum \frac{A^k}{k!} < \infty \quad (\text{purché } h < 1)$$

quindi $$h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} h^{k-2} \to 0 \quad \text{per } h \to 0$$

e $e^{At_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{Ah} - \mathbb{1}}{h} = A e^{At_0}$ ∎

$$\boxed{\text{N.B} \quad e^{At} \text{ ed } A \quad \text{commutano !}}$$

abbiamo quindi visto che e^{At} è derivabile

e $$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

quindi e^{At} risolve l'ODE matriciale

$$\begin{cases} \dot{W} = AW \\ W(0) = \mathbb{1} \end{cases}$$

quindi le soluzioni di $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

sono delle forma $e^{A(t-t_0)} x_0$

CALCOLO dell' esponenziale

Osservazione 1. Invarianza per coniugazione

consideriamo una SERIE di POTENZE matriciale $\sum c_k A^k$

se $A = L B L^{-1}$ allora

$A^k = L B^k L^{-1}$ e quindi

$$\sum c_k A^k = L \left(\sum c_k B^k \right) L^{-1}$$

In particolare se A è diagonalizzabile

$$A = L D L^{-1}$$

$$\sum c_k A^k = L \left(\sum c_k D^k \right) L^{-1}$$

ma $\sum c_k D^k$ è una matrice

diagonale! se $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\sum c_k D^k = \begin{pmatrix} \sum c_k(\lambda_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum c_k(\lambda_n)^k \end{pmatrix}$$

in particolare nel caso dell'esponenziale

$\left(c_k = \frac{1}{k!} \right)$ $\quad A = L D L^{-1}$

$$e^A = L \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix} L^{-1} \qquad D = L^{-1} A L$$

per esponenziare calcolo L e gli autovalori!

<u>Attenzione</u>: A potrebbe essere una matrice reale ma diagonalizzabile solo su $\mathbb{C}$ e e^A verrà comp. una matrice reale

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \qquad \lambda = \pm i$$

per trovare L $\qquad (A + i\mathbb{1})v = 0$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$(A - i\mathbb{1})w = 0 \; ; \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \qquad L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-it} & ie^{-it} \\ -ie^{it} & -e^{it} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & -i(e^{it} - e^{-it}) \\ +i(e^{it} - e^{-it}) & e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

infatti $\qquad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \Rightarrow$

$$\dot q = p \qquad x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$
$$\dot p = -q$$

cioè $\ddot q = -q$ con soluzioni $\cos t$, $\sin t$

quindi se considero il problema

di Cauchy $\begin{cases} \dot x = Ax \\ x(0) = \underline{e}_1 \end{cases}$

ho come soluzione $x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ ↙ prima riga di e^{At}

$\begin{cases} \dot x = Ax \\ x(0) = \underline{e}_2 \end{cases}$ $\quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ II riga di e^{At}

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Caso NILPOTENTE:

supponiamo che A sia NILPOTENTE

(cioè $\exists d : \quad A^d = 0$) (nota $d \leq n$)

$$e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(A)^k}{k!}$$

(una somma finita!)

Ricordando che se $[A, B] = 0$

allora $e^{A+B} = e^{A} e^{B}$

Esercizi

Calcolare l'exp di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema della decomposizione di Fitting

Vedremo che ogni matrice si può

decomporre come somma di DIAGONALE

e NILPOTENTE che commutano

Il teorema di Hamilton-Cayley

Ogni matrice soddisfa il suo

polinomio caratteristico.

per esempio $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad A^2 + \mathbb{1} = 0$$

$A^2 = -\mathbb{1}$ (verificare!)

ora questo si può usare per gli esp di matrice

$$A^2 = -\mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad A^3 = -A \quad ; \quad A^4 = \mathbb{1}$$

$$\sum \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1} + A - \frac{\mathbb{1}}{2} - \frac{A}{3!} + \frac{\mathbb{1}}{4!} + \cdots$$

$$\sum \frac{(At)^k}{k!} = \mathbb{1} \sum \frac{(-t)^{2k}}{(2k)!!} + A \sum \frac{t^{2k+1}(-1)^{2k}}{(2k+1)!!}$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$ (come prima!)

provare con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \mathbb{1}$

(si può fare sia diagonalizzando che

)

con Ham - Cayley)

Caso planare disegno le orbite

Nel caso in cui A sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ho una base in cui A è diagonale dove il sistema ha la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} u \\ u(0) = u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

in tale base

$$u(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} x_0 \\ e^{\lambda_2 t} y_0 \end{pmatrix}$$

se $x_0 \neq 0$

posso esprimere y in funzione di x

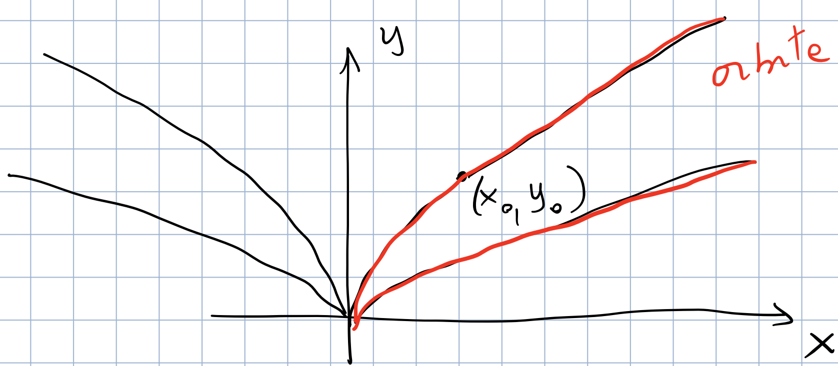
e descrivere $u(t)$ come il grafico di una

funzione $x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 \Rightarrow e^t = \left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}$

(N.B. $\frac{x(t)}{x_0} > 0$!)

$$y(t) = \left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_0 \quad \text{se } x_0 \neq 0$$

se $x_0 = 0$ $x(t) = 0$ $y(t) = e^{\lambda_1 t} y_0$



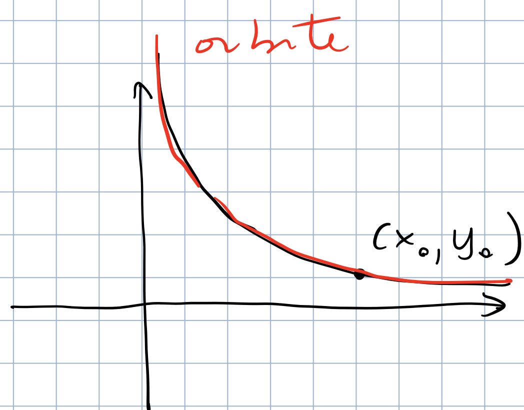
se $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ è > 1

è un pozzo

se λ_i sono < 0

una sorgente

se sono > 0



se $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ è negativo

Esercizi:

① Se A è diagonale a blocchi $\Rightarrow e^{A}$ è diagonale a blocchi

② determinare $W(t)$:

Ⓐ Se $A(t)$ commuta con $\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$

Ⓑ Se $\exists L$ (indipendente dal tempo) t.c. che diagonalizza $A(t)$ $\forall t$ $D(t) = L^{-1} A(t) L$

(Suggerimenti: fare un cambio di variabile e riguardare il caso $n=1$.