Osservazioni Tecniche.

Noi abbiamo costruito lo spazio dei campi vett. analitici come chiusura (rispetto alla norma $|\cdot|_r$) dei campi vett. polinomiali

possiamo vedere un c. vett. come una funzione

$$B_r \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad x \longrightarrow (V_1(x), \dots, V_n(x))$$

È naturale definire le funzioni analitiche reali $B_r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (denotate $C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n)$) come quelle funzioni $f \in C^\infty$ t.c. la serie di Taylor in zero converge a f nell'interno di B_r

① $A_r, |\ |_r$ è uno spazio di Banach

② $C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty, |\ |_\infty$ è uno sp. di Banach

Questi risultati si dimostrano bene

DOPO aver studiato ANALISI COMPLESSA.

N.B se $f \in A_r \iff \underline{f} \in C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$

In particolare se $f \in A_r$ allora

$$f \in C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty \quad \text{con} \quad |f|_\infty \leq r|f|_r$$

Viceversa se $f \in C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$

allora $f \in A_{r_1} \quad \forall\, r_1 < r$

Torniamo ai nostri lemmi di struttura

LEMMA: $$|S|_{r+\rho} \leq \delta := \frac{\rho}{8e(r+\rho)}$$

Allora il flusso del c.v. S

$$\begin{cases} x_\tau = S(x) \\ x(0) = y \end{cases} \qquad y \longrightarrow \varphi_S(\tau, y) \equiv \varphi(\tau, y)$$

è ben definito fino a $\tau = 1$ inoltre

(REM: $|\psi| = \sup_J |\psi_J|$)

$\psi(y) := \varphi_S(1,y)$ è ben definito

ed analitico con

$$\sup_{y \in B_r(0)} |\psi(y) - y| \leq (r+\rho)|S|_{r+\rho}$$

In AM430_18 non abbiamo dimostrato

che ψ è analitico. Dai teoremi di

fuga coi compatti sappiamo che $\varphi(t,y)$

è ben definito e Lipschitz in y

per $|t| < 8e$. Inoltre sappiamo che

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. per $|t| < \varepsilon$, $\varphi(t,y)$ è C^1

in tutte le variabili.

Io vi ho detto che per chiudere la

dimostrazione si poteva applicare il TFI

quantitativo per mostrare che $\varepsilon > 1$.

(Vedi: DIM alternativa alla fine)

LEMMA

Dando per buono che $C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty =: H_r$

è di Banach dimostriamo che

$\varphi(t,y) \in C(I, H_r)$ con $I = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

N.B $C(I, H_r)$ è di Banach rispetto

alla norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{I \times B_r} |f(t,x)|$

col LEMMA delle contrazioni !

$M = C(I, H_r)$;

$$E := \{ f \in M \mid \forall t \in I \ \forall y \in B_r \quad f(t,y) \in B_{r+\frac{\rho}{2}} \}$$

$$\Phi(f)(t,y) = y + \int_0^t S(f(\tau,y))\, d\tau$$

① Mappa $E \to E$

infatti composizione di funzioni analitiche

è analitica e inoltre

$$|\phi(f)(t,y)| \leq r + \frac{3}{2} \sup_{x \in B_{r+\frac{\rho}{2}}} |S(x)|$$

$$\leq r + \frac{3}{2}\left(r+\frac{\rho}{2}\right) |S|_{r+\rho/2} < r + \frac{\rho}{2}$$

(dalla piccolezza di $|S|_{r+\rho}$)

② ϕ è una contrazione

infatti

$$\sup_{I \times B_r} |\phi(f) - \phi(g)| \leq \left| \int_0^t |S(f) - S(g)| \, d\tau \right|$$

$$\leq \frac{3}{2} \sup_{x \in B_{r+\frac{\rho}{2}}} \|JS(x)\|^{op} \sup_{I \times B_r} |f(t,y) - g(t,y)|$$

$$\leq \frac{3}{2} \cdot 6 \, \frac{r+\rho}{\rho} \, |S|_{r+\rho} \, |f-g|_\infty$$

dim di ✱

✱ $$(JS)_{iS} = \frac{\partial S_J}{\partial x_i} = \sum_a S_{J,a}\, a_i\, x^{a-e_i}$$

ora $\forall\, x \in B_R$ $(\forall R>0)$

$$|JS|^{op} = \max_{|v_i|\le 1} \sup_J \left|\sum_i \frac{\partial S_J}{\partial x_i} v_i\right| \le \sup_J \sum_a |S_{J,a}| \sum a_i R^{|a|-1}$$

$$\le \sum_d \sup_J \sum_{\substack{a;\\ |a|=d+1}} |S_{J,a}|\,(d+1)\, R^d$$

$$\le \sum_d |S^{(d)}|_{R+\delta} \sup_{x\ge 0} (x+1)\left(\frac{R}{R+\delta}\right)^x$$

ora (calcolo diretto) per $0<\delta<\frac{R}{2}$

$$\sup_{x\ge 0} (x+1)\left(\frac{R}{R+\delta}\right)^x \le 3\,\frac{R+\delta}{\delta}$$

per dimostrare ✱ applico quanto sopra

con $R = r+\frac{\rho}{2}$, $\delta = \frac{\rho}{2}$ $(R+\delta = r+\rho)$

Dato che Φ è una contrazione ammette un unico punto fisso $\varphi \in C(I, H_r)$ che soddisfa l'equazione di Duhamel:

$$\varphi(t,y) = y + \int_0^t S(\varphi(\tau,y))\, d\tau$$

per $|t| \leq \frac{3}{2}$.

Quindi $\psi(y) := \varphi(1,y) \in H_r$. ∎

Potreste NON essere contenti di questa dim che usa due fatti che NON ho dimostrato ① H_r è Banach; ② composizione di funzioni analitiche è analitica.

Naturalmente per tutti i nostri ragionamenti serve solo che ψ sia C^1 con inverso C^1 (vedere il lemma $\psi_* V = e^{[S,\cdot]} V$)

quindi potremmo fare il lemma delle contrazioni nello sp. di Banach delle funzioni C^1. (o in generale C^k)

Ecco uno schema di dimostrazione (un pó NOIOSA)

Con le notazioni di prima consideriamo

$$M = C(I, C^1(B_r, \mathbb{R}^n))$$

Spazio di Banach rispetto alla norma

$$|f|_{C^1,\rho} := \sup_{I\times B_r} |f| + \frac{\rho}{2} \sup_{I\times B_r} |f_y|$$

$$\left(\text{Rem } |f| = \sup_J |f_J| \ ,\ x \in B_r \Rightarrow |x_i| \leq r \right)$$

$$E := \left\{ f \in M \ \middle|\ |f - y|_{C^1,\rho} \leq \frac{\rho}{2} \right\}$$

ho messo il peso $\frac{\rho}{2}$ perché mi facilita di parecchio i conti !

① Φ mappa E in E $(\delta 1)$

infatti se $\varphi \in E$ $\forall\, t, y \in I \times B_r$ $\varphi(t,y) \in B_{r+\frac{\rho}{2}}$

$V(\varphi(t,y))$ è ben definito continuo in t C^1 in y

inoltre $\displaystyle |\Phi(\varphi) - y| \leq \frac{3}{2} \sup_{x \in B_{r+\frac{\rho}{2}}} |S| \leq \frac{3}{2}(r+\rho)|S|_{r+\rho}$

infine $\displaystyle |\Phi_y(\varphi) - \mathbb{1}| \leq \left| \int_0^t JS(\varphi)\, \varphi_y \, d\tau \right|$

$$\leq \frac{3}{2} \sup_{x \in B_{r+\frac{\rho}{2}}} \|JS\|^{op} \sup_{I \times B_r} |\varphi_y|$$

$$\leq \frac{3}{2} \cdot 6 \left(\frac{r+\rho}{\rho}\right) |S|_{r+\rho} .$$

quindi $\displaystyle |\Phi(\varphi) - y|_{C^1,\rho} \leq \frac{3}{2} \cdot 3 (r+\rho) |S_{r+\rho}|$

$$\leq \frac{3 \cdot 3}{8e} \frac{\rho}{2} \leq \frac{\rho}{2}$$

② Φ è una contrazione (un pó doloroso)

$$|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)|_E =$$

$$\sup_I \left| \int_0^t S(\varphi(\tau)) - S(\psi(\tau))\,d\tau \right|_{C_{1,\rho}}$$

$$\leq \sup_I \frac{3}{2} \sup_{x \in B_{r+\frac{\rho}{2}}} |JS(x)|^{op} \sup_{I \times B_r} |\varphi - \psi| +$$

$$\frac{\rho}{2} \sup_{I \times B_r} \left| \int_0^t | \partial_x S(\varphi)\, \partial_y \varphi - \partial_x S(\psi) \partial_y \psi | \right| \leq$$

(sommo e sottraggo $\partial_x S(\varphi(\tau))\, \partial_y \psi$)

$$3 \cdot \frac{3}{2} \frac{(r+\rho)}{\rho} |S|_{r+\rho} |\varphi - \psi|_\infty +$$

$$\frac{\rho}{2} \frac{3}{2} \sup_{B_{r+\frac{\rho}{2}}} |\partial_x S(x)|^{op} |\varphi_y - \psi_y|_\infty$$

$$\frac{\rho}{2} \cdot \frac{3}{2} \sup_{B_r} |\partial_y \psi| \sup_{B_{r+\frac{\rho}{2}}} |\partial_x^2 S|^{op} |\psi - \varphi|_\infty \leq$$

ora noto che

$$\sup_{x \in B_{r+\frac{\rho}{2}}} \left| \partial_x^k S \right|^{op} \le \sum (d+1) \left| S^{(d)} \right| \left(r+\frac{\rho}{2}\right)^{d+1-k}$$

$$\le \left(r+\frac{\rho}{2}\right)^{1-k} \sup_{x \ge 0} (x+1)^k \left(\frac{r+\frac{\rho}{2}}{r+\rho}\right)^x |S|_{r+\rho}$$

ora $$\sup_{x \ge 0} (x+1)^k \left(\frac{R}{R+\delta}\right)^x \le \frac{3}{2} k^k e^{-k} \left(\frac{R+\delta}{\delta}\right)^k$$

quindi in conclusione

$$\blacksquare \le \frac{3 \cdot 3}{2} \frac{r+\rho}{\rho} |S|_{r+\rho} |\varphi-\psi|_{C^1,\rho} +$$

$$+ \frac{\rho}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot e^{-2} \left(\frac{r+\rho}{\rho}\right)^2 \cdot 4 \left(r+\frac{\rho}{2}\right)^{-1} |S|_{r+\rho} |\varphi-\psi|_\infty$$

$$\le \left(\frac{9}{2} + \frac{9 \cdot 4}{e^2} \cdot \frac{3}{2}\right) \frac{r+\rho}{\rho} |S|_{r+\rho} |\varphi-\psi|_{C^1,\rho}$$

$$\le \theta |\varphi-\psi|_{C^1,\rho}$$

$$\theta = \frac{9}{2}\left(1 + \frac{12}{e^2}\right)\frac{1}{8e} \sim 0,5 \qquad \text{ok}$$

quindi ho dimostrato che $\varphi(t, y)$ é C^2 in y $\forall\, t \in I \Rightarrow \psi(y) := \varphi(1, y)$ ē C^1 inoltre $\psi^{-1}(x) := \varphi(-1, x)$ ē C^1