$$|S|_{r+\rho} < \frac{\rho}{r+\rho} \frac{1}{8e}$$

$|t| < 8e$ $\qquad \varphi(t, y)$ con $y \in B_r$

é ben definito $\qquad \psi(y) = \varphi(1, y)$

$$\psi_* (D+V) = e^{[S, \cdot]} (D+V)$$

Resterà da discutere la regolarità

$$C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n)$$

$$f \in C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in C^\infty(B_r, \mathbb{R}^n)$$

la serie di taylor di f in $x_0 = 0$

$$f_J(x) = \sum f_{J,a} \, x^a \qquad \text{è tot}$$

convergente in ogni palla B_{r_1} $\quad r_1 < r$

e converge ad f in $\overline{B}_r$

f è limitata in $\overline{B}_r$

è uno spazio di Banach rispetto alla norma del sup

$$|f|_\infty = \sup_{x \in B_r} \max_{j=1,\dots,n} |f_j(x)|$$

$$A_r : \quad B_r \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad f = \sum f_{j,\alpha} x^\alpha$$

$$\sum |f_{j,\alpha}| \, r^{|\alpha|} < \infty$$

converge tot in $\overline{B}_r$

Chiamo H_r lo spazio delle funzioni

$C^\omega(B_r, \mathbb{R}^n)$ e limitate resp. $| \, |_\infty$

è uno spazio di Banach

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = S(\varphi) & \text{con } y \in B_r \\ \varphi(0) = y \end{cases}$$

Lemma $\varphi(t, y) \in H_r \quad \forall \; |t| < \frac{3}{2}$

quindi in particolare $\Psi(y) = \varphi(1, y)$

è una funzione analitica

$$\varphi(t, y) = y + \int_0^t d\tau \; S(\varphi(\tau))$$

$$I = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \qquad M = C(I, H_r)$$

$t \longrightarrow \varphi(t, y)$ come funzione di y

è analitica.

è uno spazio di Banach

$$|f|_\infty = \sup_{I \times B_r} |f(t,y)|$$ ← norma del max $|f_j|$, $j=1,\dots,m$

$$E : \left\{ f \in M : |f|_\infty \leq r + \frac{\rho}{2} \right\}$$

$$\Phi(f)(t,y) = y + \int_0^t S(f(\tau,y))\, d\tau$$

Verificare

1. $\phi : E \to E$

2. $|\phi(f) - \phi(g)|_\infty \leq \theta\, |f-g|_\infty$

con $\theta < 1$

allora $$\varphi = y + \int_0^t S(\varphi)\, d\tau$$

ammette una (e una sola) sol in E!

—— . ——

$$D + V \qquad \text{con} \quad V \in \mathcal{A}_{R_0}^{\geq 1}$$

$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Non-Risonante a ordine N

$$\lambda \cdot a - \lambda_j \neq 0 \quad \forall j \quad \forall a$$

$2 \leq |a| \leq N+1$

$$\exists\, r_N > 0 \qquad G_N \in \mathcal{P}^{1 \leq d \leq N}$$

$$|G_N|_{2r_N} \leq \frac{1}{16e}$$

$$\begin{cases} \varphi' = G_N(\varphi) \\ \varphi(0) = y \end{cases} \Rightarrow \varphi(t, y)$$

$$\psi(y) = \varphi(1, y) \qquad \psi : B_{r_N} \to B_{2r_N}$$

$$\psi_*(D+V) = e^{[G_N, \cdot]}(D+V) =$$

$$= D + W \qquad (W = W_N)$$

con $W \in \mathcal{A}_{r_N}^{\geq N+1}$

(Dim. TFI su

$$\mathcal{F}(G, V) := \prod^{1 \leq d \leq N+1} e^{[G, \cdot]}(D+V)$$

$$= \prod^{1 \leq d \leq N+1} \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{ad}\, G)^k}{k!}(D+V)$$

Cosa succede se

$$\lambda \cdot a - \lambda_J = 0 \quad \text{per qualche}$$

$$a, J \quad \text{t.c.} \quad 2 \leq |a| \leq N+1 \ ?$$

$$\mathcal{P}^{1 \leq d \leq N} = K^{1 \leq d \leq N} \oplus \mathcal{R}^{1 \leq d \leq N}$$

$$K = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{ad}\,\Delta \ , \ \text{dentro} \ \mathcal{P}^{1 \leq d \leq N} \right)$$

$$K^{1 \leq d \leq N} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left(x^a \frac{\partial}{\partial x_j} \ : \ \lambda \cdot a - \lambda_j = 0 \right)$$

$$\mathcal{R}^{1 \leq d \leq N} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left(x^a \frac{\partial}{\partial x_j} \ : \ \lambda \cdot a - \lambda_j \neq 0 \right)$$

$$\mathcal{P}^{1\leq d\leq N} = K^{1\leq d\leq N} \oplus R^{1\leq d\leq N}$$

$$\mathrm{ad}\, D\, [G] = [D, G]$$

è invertibile come mappa da

$R^{1\leq d\leq N}$ in se stesso

$$F = \sum_{\substack{j, a:\\ \lambda\cdot a - \lambda_j \neq 0\\ 2\leq |a|\leq N+1}} F_{j,a}\, x^a \frac{\partial}{\partial x_j} \in R^{1\leq d\leq N}$$

$$[D, G] = F \quad \Rightarrow \exists!\ \text{sol}$$

$$G \in R^{1\leq d\leq N}$$

$$G = \sum \frac{F_{j,a}}{\lambda\cdot a - \lambda_j} x^a \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$[D, G] = \sum G_{j,a} (\lambda\cdot a - \lambda_j) x^a \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\mathcal{P}^{1\leq d\leq N} : K^{1\leq d\leq N} \oplus R^{1\leq d\leq N}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(G, V) = \prod_{\text{Range}} \prod_{1\leq d\leq N} e^{[G,\cdot]} (D+V)$$

$$R^{1\leq d\leq N} \times P^{1\leq d\leq N} \longrightarrow R^{1\leq d\leq N}$$

$$d_G \tilde{\mathcal{F}}(0,0)[g] = \prod_{\text{Range}} \prod_{1\leq d\leq N} [g, D]$$

se $G \in \mathcal{R}^{1 \le d \le N}$ $\quad [G, D] \in \mathcal{R}^{1 \le d \le N}$

(perché)

$$[D, G] = \sum G_{j,e} (\lambda \cdot a - \lambda_j) x^a \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$d_G \tilde{\mathcal{F}}(0,0)[g] = [g, D]$$

è invertibile da $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$

$\exists \; r_N \quad \exists \; G_N \in \mathcal{R}^{1 \le d \le N}$

t.c. $\tilde{\mathcal{F}}(G_N, V) = 0$

$$e^{[G_N, \cdot]}(D + V) = D + Z + W$$

con $W \in \mathcal{A}_{r_N}^{\ge N+1}$

$Z \in P^{1 \leq d \leq N}$ ~~di~~ per

$Z \in K^{1 \leq d \leq N}$

$n = 2 \qquad D = (1, -1)$

Esercizio descrivere $K^{1 \leq d \leq 4}$

(per N generico)

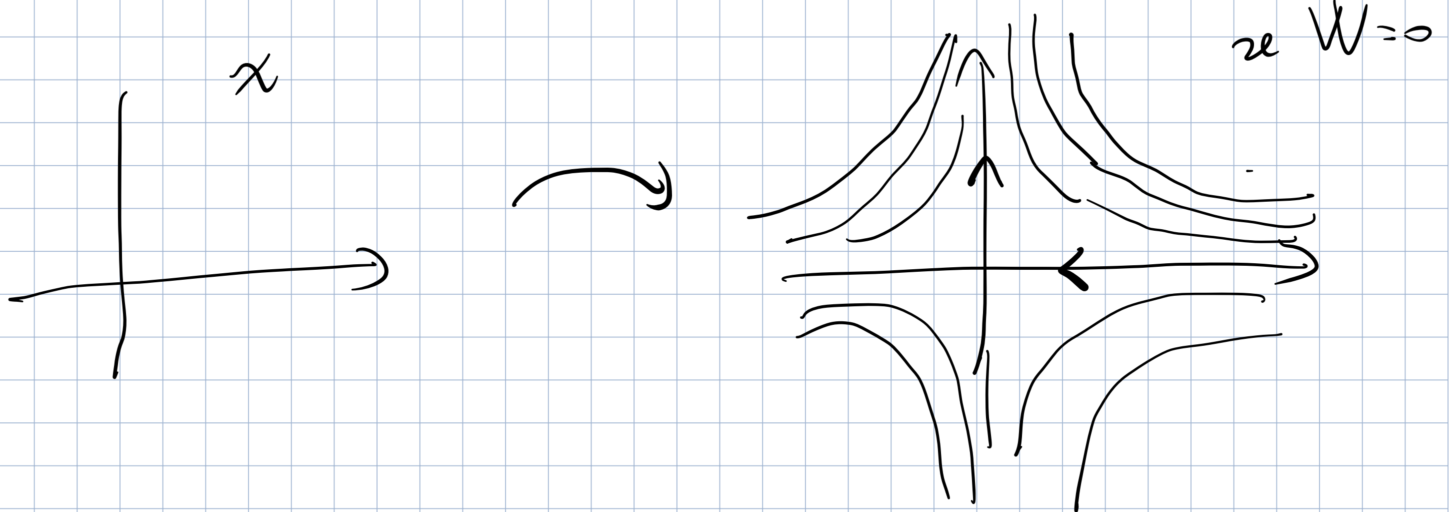
$$V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

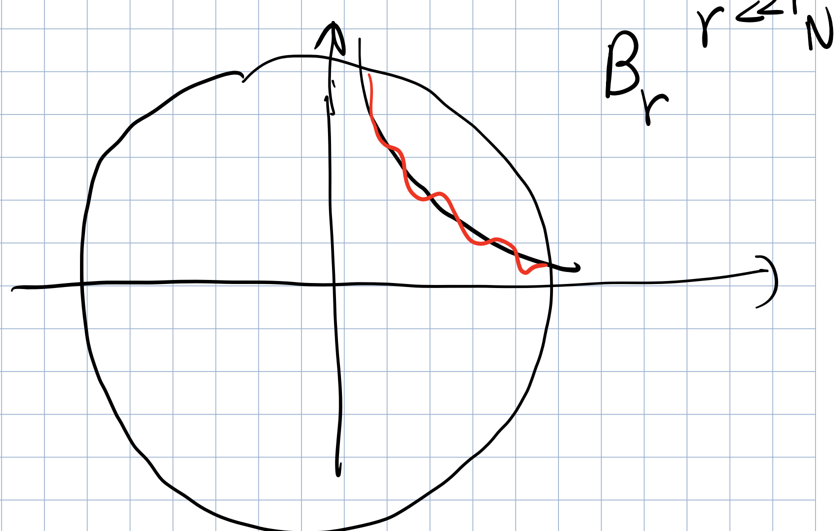
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + V(x_1, x_2)$$

$\downarrow$ con Birkoff

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1(y_1, y_2)\, y_1 \\ Z_2(y_1, y_2)\, y_2 \end{pmatrix} + W$$

Se si partiva da una eq. Hamiltoniana allora si dim. che $z_1(y_1 y_2) = -z_2(y_1 y_2)$ allora $y_1 y_2$ è una costante del moto se $W = 0$





$$P^{1 \le d \le 4} \qquad x_1^{a_1} x_2^{a_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad 2 \le |a_1 + a_2| \le 5$$

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$K = \mathrm{Span}$ t.c. $\lambda \cdot a - \lambda_J = 0$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$D + V \overset{G_N^N}{\rightsquigarrow} D + Z + W$$

dove $W \in A_{r_N}^{\ge N+1}$ se $r << r_N$

è molto piccolo

$$\dot{x} = D + V \rightsquigarrow \dot{y} = D + Z + W$$

confronto la dinamica vera

$$y' = D + Z + W$$

con la "forma normale"

$$u' = D + Z$$

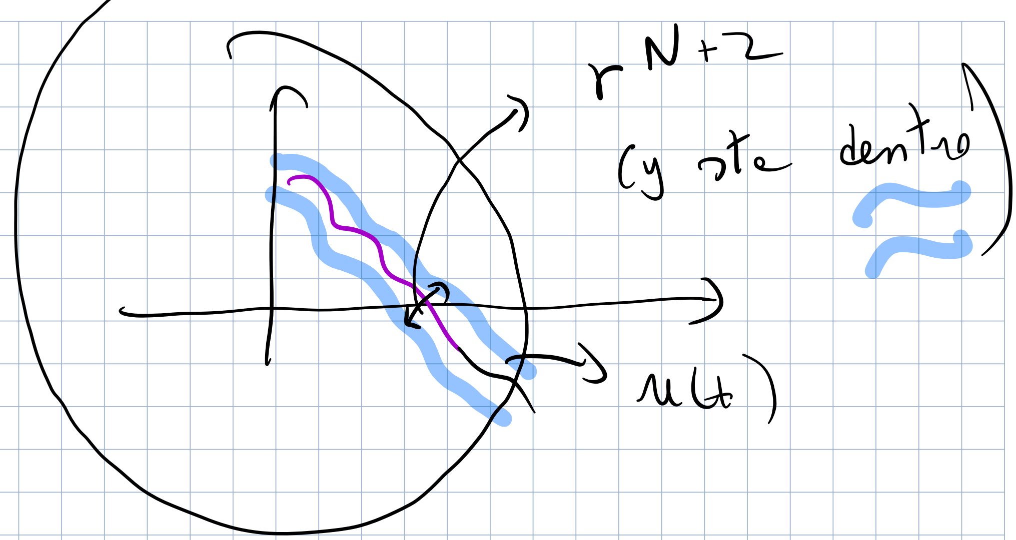
per $|t| < T$

fino a che $y(t)$ e $u(t)$ sono in B_r

allora $|y(t) - u(t)| \leq M T e^{2\max(\lambda_j) T}$

dove $M = \max_{x \in B_r} |W(x)| \leq \frac{r^{N+2}}{r_N^{N+1}} |W|_{r_N}$

$$|y - u| \sim r^{N+2} T e^{LT}$$



$$\begin{pmatrix}\dot q\\ \dot p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\ -q\end{pmatrix} + \bar V = D\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix} + \bar V$$

$$D = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

non è diagonalizz. in $\mathbb{R}$

$$D + V \quad \text{con} \quad D = p\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial p}$$

È più difficile studiare

$$\mathrm{ad}D : G \to [D, G]$$

(non è più diagonale su $\mathcal{P}^{(d)}$)

$$\mathcal{F}(G, V) = \prod_{\text{Range}} \prod_{1 \le d \le N} e^{[G,}\, (D+V))$$

$$\mathcal{P}^{1 \le d \le N} = K^{1 \le d \le N} \oplus R^{1 \le d \le N}$$

dove

$K =$ il ker di ad D nello

spazio $\mathcal{P}^{1 \le d \le N}$ $\quad R$ è il range

$$\dot{x} = Ax + V^{\geq 1}$$

con A non semisemplice

$$A = S + N \qquad (S \text{ e } N \text{ commutano})$$

$$\dot{x} = D + V$$

D è diagonale

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e tutte le $\lambda_i > 0$

$a_i \geq 0$

allora $\lambda \cdot a - \lambda_J$

se $|a|$ è abbastanza grande

$$\lambda \cdot a - \lambda_J \geq \min_{i=1,\dots,n} (\lambda_i)$$

$$\lambda \cdot a - \lambda_J \geq \sum \lambda_i a_i - \lambda_J$$

$$\geq \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i \sum_k a_k - \max_{i=1,\dots,n} \lambda_i$$

$$\shortparallel$$

$$\min \lambda_i |a| - \max \lambda_i$$

se $|a| \geq \dfrac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i} + 1 = N_0$

allora $\lambda \cdot a - \lambda_J \geq \min \lambda_i$

se D è Non risonante

e ordine N_0 allora

$$\inf_{a,J} |\lambda \cdot a - \lambda_J| = \gamma > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\min \left(\inf_{|a| \leq N_0} |\lambda \cdot a - \lambda_J| , \inf_{|a| > N_0} |\lambda \cdot a - \lambda_J| \right)$$

$$\geq \min \left(\min_{|a| \leq N_0} |\lambda \cdot a - \lambda_J| , \min \lambda_i \right)$$

$\neq 0$

siccome D è non-res e ordine N_0

$\neq 0$

Teorema (Poincaré)

$D+V$ con $V \in \mathcal{A}_{R_0}^{\geq 1}$

e $D = \sum \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $\lambda_i > 0$

e NON risonante (a ordine N_0)

$\left(\text{con } \inf_{\ell, J} |\lambda \cdot \ell - \lambda_J| =: \gamma > 0 \right)$

allora $\exists\, r_N > 0$; $\exists\, G_N \in \mathcal{A}_{2 r_N}^{\geq 1}$

$$e^{[G_N, \cdot]} (D+V) = D$$

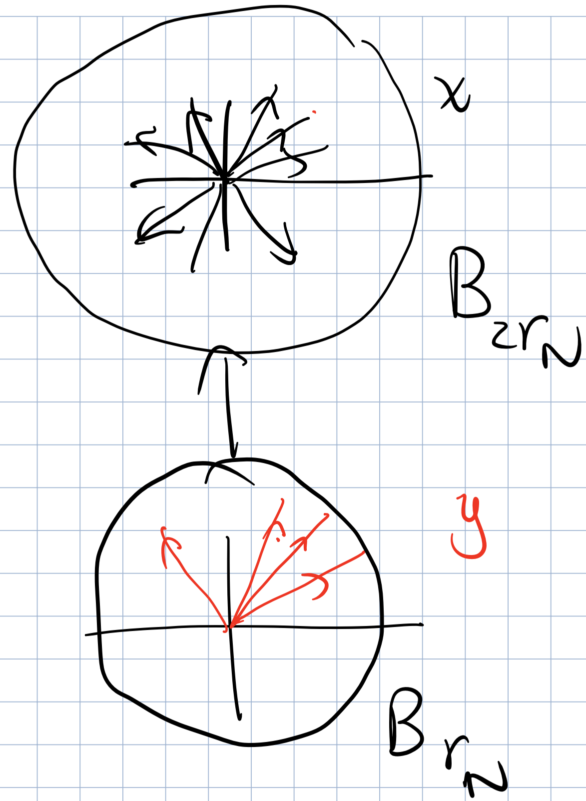
per $y \in B_{r_N}$

esiste $\psi : B_{r_N} \to B_{2 r_N}$ t.c.

$$x' = D + V$$

$$\uparrow \; \psi$$

$$y' = D$$



$$\mathcal{F}(G,V) = e^{[G,}(D+V) - D$$

$$V = \mathcal{A}^{\geq 1}_{2r} \qquad G \in \mathcal{A}^{\geq 1}_{2r}$$

$$|G|_{2r} \leq \frac{1}{16e}$$

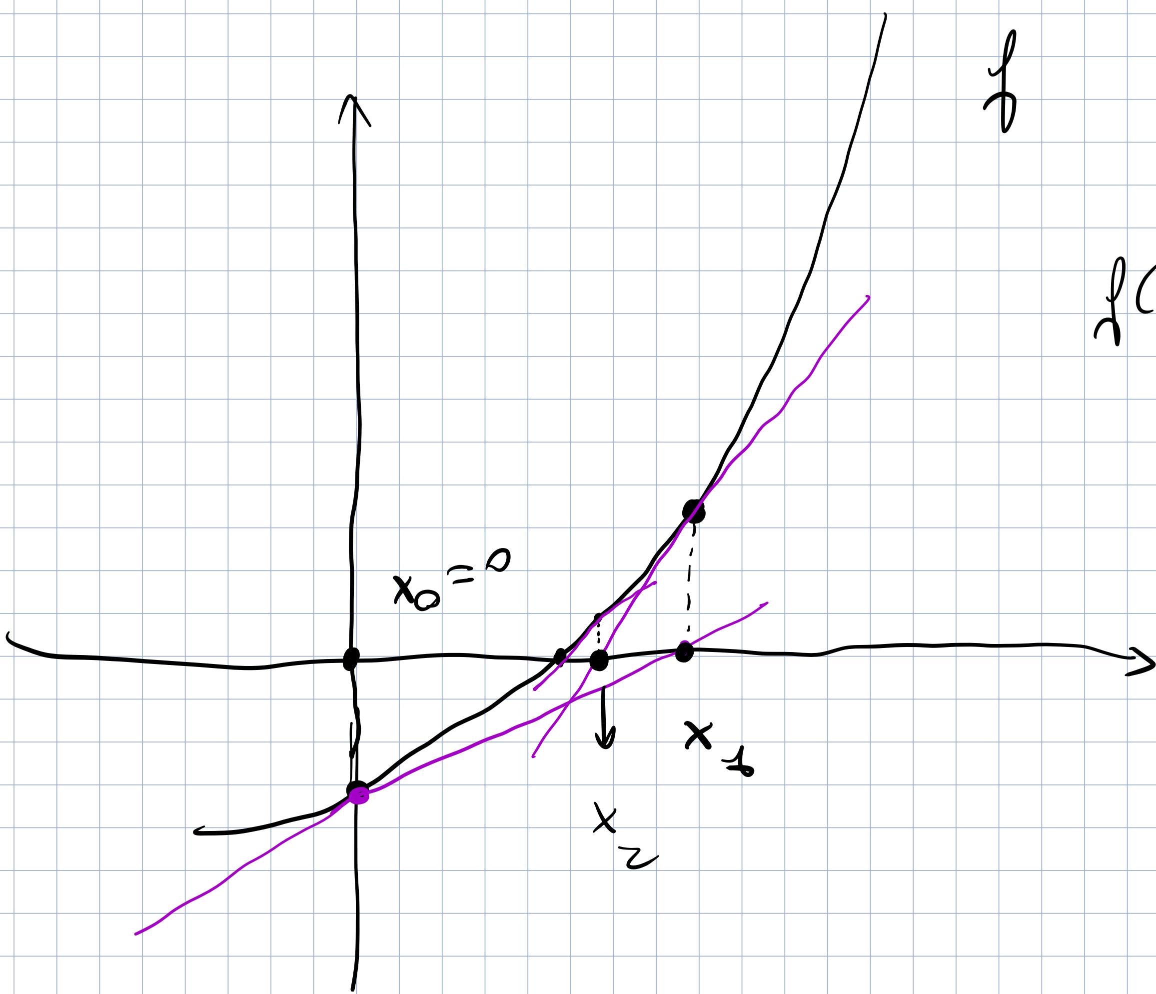
$$\mathcal{A}^{\geq 1}_{2r} \times \mathcal{A}^{\geq 1}_{2r} \longrightarrow \mathcal{A}^{\geq 1}_{r}$$

$$\mathcal{F}(0,0) = 0$$

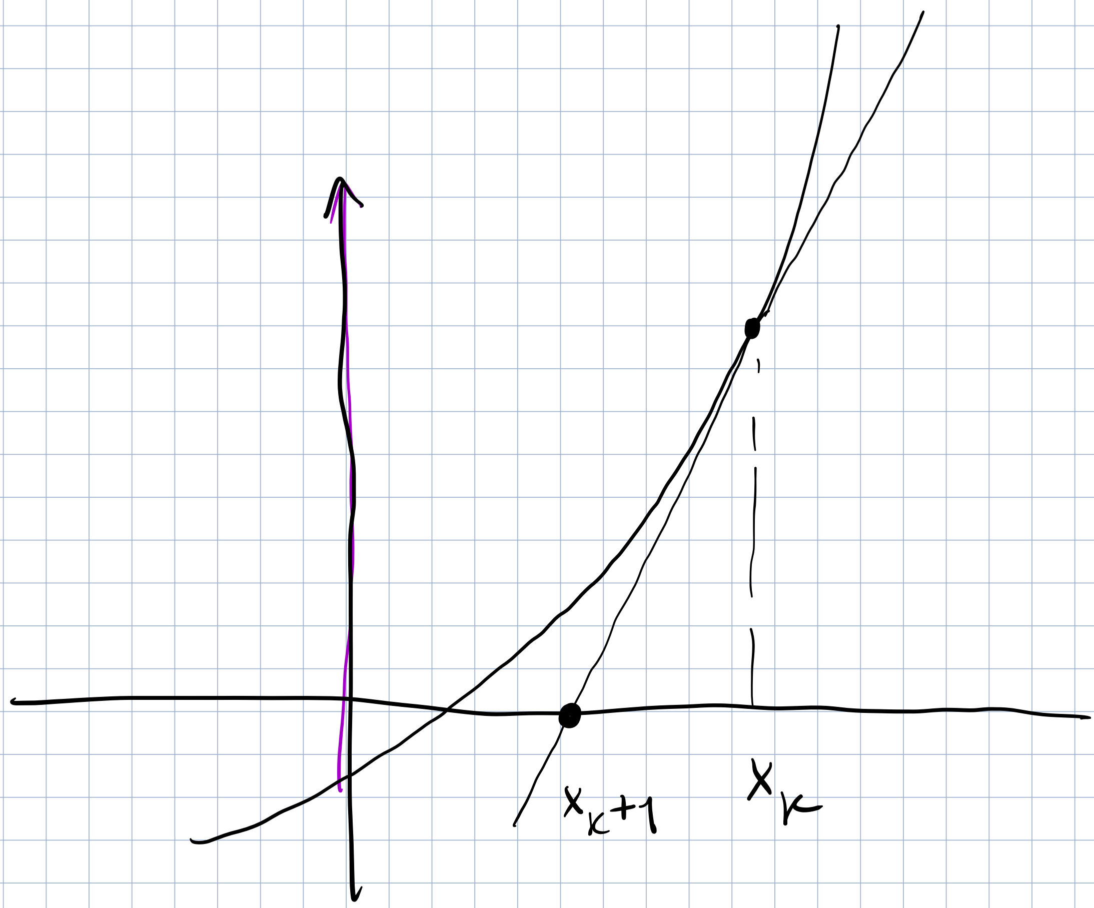
$d_G \mathcal{F}(0,0)[g] = [g, D]$

è vero che ad D è invertibile

da $A^{\geq 1}_{2r} \longrightarrow A^{\geq 1}_{r}$?



$x_i \to \bar{x}$ con $f(\bar{x}) = 0$



$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$x_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x_k$$

$$f(x_{k+1}) \sim \left(f(x_k)\right)^2 \qquad f(x_0) \ll 1$$