Vedere lezione precedente per Gronwall in forma differenziale + confronto

Esercizio Importante:

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{|u|} \\ \cancel{x}u(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{v} = 2\sqrt{|v|} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

posso concludere che $v(t) \geq u(t)$ $\forall t$?

Un ultimo ESERCIZIO di fuga dai compatti

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che

$\forall \; x \in B_{2R}(0)$ $\quad |f(x) \cdot \hat{x}| < \varepsilon$ $\qquad \hat{x} = \frac{x}{|x|}$

consideriamo $\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $\quad u_0 \in B_R(0)$

dimostrare che $u(t) \in B_{2R}(0)$

$\forall\ |t| < T := \frac{R}{\varepsilon}$ (quindi $[-T, T] \subset I_{max}$)

suggerimento scrivere l'equazione differenziale per $r(t) = |u(t)| = \sqrt{u(t) \cdot u(t)}$

pensare in forma integrale

RAGIONARE per ASSURDO!

Abbiamo visto che in generale non si può sperare di conoscere le traiettorie di una ODE. Anche trovare le orbite se non ci sono costanti del moto (o se il sistema NON è in $\mathbb{R}^2$) è molto complicato.

Vogliamo quindi capire la forma qualitativa delle soluzioni.

APPROCCIO DI FORMA NORMALE:

cerco un cambiamento di variabile che rende il mio sistema dinamico il più semplice possibile

Diffeomorfismi

Una mappa $\varphi : C^1(A, \mathbb{R}^n)$ $\quad (A \subset \mathbb{R}^n)$

invertibile con inversa C^1

(NOTA BENE questo vuol dire che $J\varphi$ è invertibile in A)

$$A \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} B$$

Consideriamo ora una ODE su A

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

(sappiamo che $u(t) \in A$ $\forall\, t \in (a,b)$ $\quad u \in C^1((a,b), A)$)

posso porre $v(t) = \varphi(u(t))$ $\quad (v \in C^1((a,b), B))$

calcoliamo l'eq. diff che soddisfa v

$$\dot{v}(t) = J\varphi(u(t))\,\dot{u}(t) = J\varphi(u(t))\, f(u(t))$$

$\boxed{\text{III}}$ $$= J\varphi\left(\varphi^{-1}(v(t))\right) f\left(\varphi^{-1}(v(t))\right)$$

$$\begin{cases} \dot v = g(v) \\ v(0) = \varphi(u_0) \end{cases} \quad \text{dove} \quad g(v) \quad \text{si induce } g(v) = \varphi^* f$$

N.B. si scrive in modo + semplice in termini di $\psi = \varphi^{-1}$ $\quad u(t) = \psi(v(t))$

$$\dot u = J\psi(v(t))\,\dot v$$

e ricordando che $\forall\, x \in B$ $J\psi(x)$ è invertibile

$$\dot v = \left(J\psi(v)\right)^{-1} f(\psi(v))$$

supponiamo che in entrambe i sistemi valga esistenza e unicità globale allora finché $v(t) \in B$ se $\dot v = g(v)$ allora $u(t) = \psi(v)$ risolve $\dot u = f(u)$ e viceversa.

Naturalmente si possono anche considerare cambiamenti di coordinate dipendenti dal tempo $u(t) = \psi(v(t), t)$

Esercizio:

se $\dot{u} = f(u)$ scrivere l'ODE per v

Esempio:

$$x' = 1 - \log(t+x)$$

$$y' = x' + 1 = 2 - \ln(y)$$

$$y(t) = x(t) + t$$

$$(I_{max} = \mathbb{R})$$