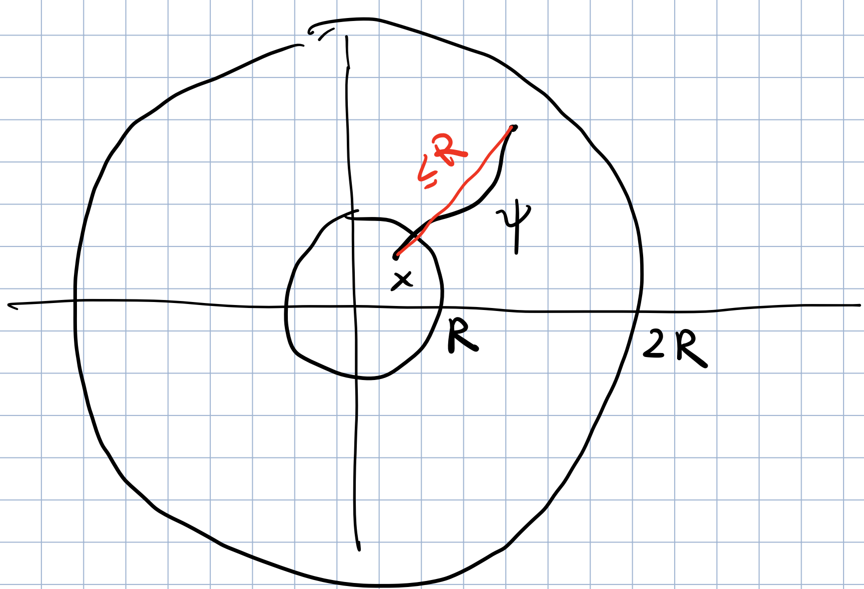
Consideriamo una ODE

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{u} = f(t,u) \\ u(0) = x \end{cases} \qquad \text{Dove } f \in C^1(I \times U, \mathbb{R}^n)$$

U è un aperto di $\mathbb{R}^n$ I è un intervallo

Supponiamo per semplicità che $U = B_{2R}(0)$ e $I = [-1,1]$.

Supponiamo che $\forall x \in B_R(0)$ vale il teorema di esistenza e unicità in I e inoltre la soluzione di $(*)$ $u(t) = \phi(t,x)$ è tale che posto $|\phi(t,x) - x| < R$



(altrimenti rimpicciolisco I)

Se pongo $\psi(t,x) := \phi(t,x) - x$

si ha che $\forall x \in B_R(0)$ $t \to \psi(t,x)$ è C^1 (nel tempo)
$I \to B_R(0)$

inoltre soddisfa

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, x + \psi(t,x))$$

cioè risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\psi} = f(t, x+\psi) \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

(e questa soluzione è UNICA!)

Teorema: ψ è C^1 rispetto a (t,x) in un intorno di $(0,0)$

Potrei provare a determinare ψ

col TFI da $G(\psi, x) := \dot{\psi} - f(t, x+\psi)$

(che è C^1 in tutte le variabili)

$$d_\psi G(0,0)[h] = \dot{h} - f'(t,0)h$$

Non so far vedere se è invertibile!

CONVIENE prima riscalare il tempo

se $\dot{\psi} - f(t, x+\psi) = 0$ pongo per $a \in [-1,1]$

$$\gamma(t,x,a) := \psi(at,x)$$ che risolve

$\forall\ t \in \frac{1}{a} I \quad x \in B_R(0)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(t,x,a) = a\,\frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\tau,x)\Big|_{\tau=at} = a\, f(at, x+\psi(at,x))$$

$$\parallel$$

$$a\, f(at, x+\gamma(t,x,a))$$

cioè in forma compatta

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - a\, f(at, x+\gamma) = 0$$

inoltre $\forall (x,a) \in B_R(0) \times [-1,1]$

$$t \to \gamma(t,x,a) \quad \text{è} \quad C_0^1(I, B_R(0))$$

$(\gamma(0) = 0)$

Consideriamo quindi

$$F(\gamma, x, a) := \dot{\gamma} + a\, f(at, x+\gamma)$$

① F è

$$C^1\big(C^1_0(I, B_R(0)) \times B_R(0) \times [-1,1] \,,\; C^0_0(I, B_R(0))\big)$$

$$\gamma \qquad\qquad x \qquad\qquad a$$

Infatti: $\quad d_\gamma F(\gamma, x, a)[h] = \dot h + a f_x(at, x+\gamma) h$

$$F_x(\gamma, x, a) = a f_x(at, x+\gamma)$$

$$F_a = f(at, x+\gamma) + at f_t(at, x+\gamma)$$

Inoltre $\quad d_\gamma F(0,0,0)[h] = \dot h$

che è invertibile

quindi $\exists\ \varepsilon, r > 0$ ed una mappa C^1

$$(-r, r) \times [-2\varepsilon, 2\varepsilon] \longrightarrow C^1(I, B_R(0))$$

$$x \,,\; a \longrightarrow \gamma(t, x, a)$$

che risolve $F(\gamma, x, a) = 0$

ma per costruzione $\gamma(t, x, a)$ è tale che

$\psi(t,x,a) := \gamma\left(\frac{t}{a}, x, a\right)$ risolve

il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\psi = f(t, x+\psi) \\ \psi(0) = 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad \left|\frac{t}{a}\right| \leq 1$$

quindi PER UNICITÀ

$$\gamma\left(\frac{t}{a}, x, a\right) = \gamma\left(\frac{t}{A}, x, A\right)$$

(suppongo $a < A$) nell' intervallo $\frac{|t|}{a} < 1$

allora fisso per esempio

$$\psi(t,x) := \gamma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right) \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

e $\phi(t,x) = x + \psi(t,x)$ (come avevamo posto all'inizio) $\blacksquare$

Osservazione si dimostra che

se $f \in C^k \Rightarrow \phi(t,x)$ é C^k localmente

Dato che (almeno per tempi piccoli e in una piccola palla di dati iniziali)

$(t,x) \rightsquigarrow \phi(t,x)$ è C^1 in tutti gli argomenti posso usare i flussi delle ODE per generare cambiamenti di coordinate

Per esempio se considero la ODE di prima

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = f(u) \\ u(0) = x \end{cases}$$ con $f(u)$ una funzione C^1

allora nell'intervallo $[-a,a] \times B_r(x_0)$ in cui la soluzione $\phi(\tau,x)$ è una mappa C^1

$\forall \tau_0 \quad x \longrightarrow u = \phi(\tau_0, x)$ è un diffeomorfismo. Nota che al momento sappiamo

$\phi : B_r(x_0) \longrightarrow B_{2r}(x_0)$ è C^1

$\phi^{-1}(\tau_0, \cdot) = \phi(-\tau_0, \cdot) : B_r(\phi(\tau_0, x_0)) \to B_{2r}(\phi(\tau_0, x_0))$