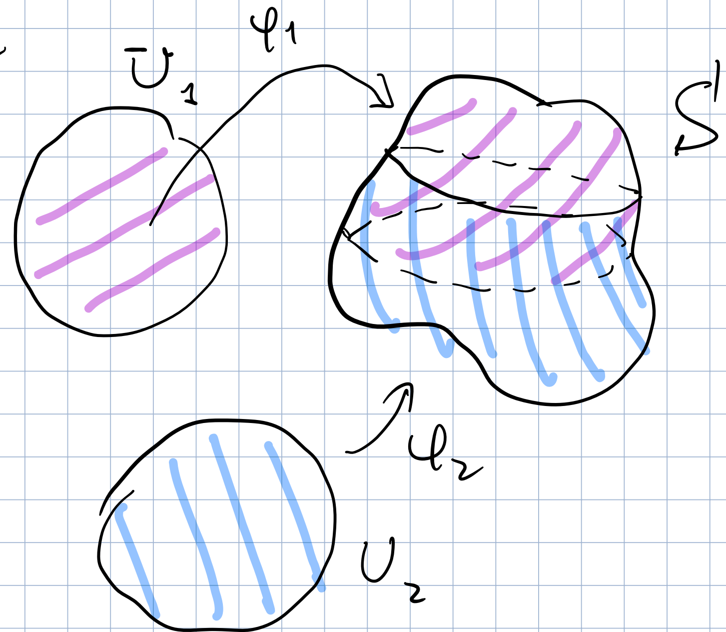
Immaginiamo di avere un moto su una superficie (per esempio dovuto a dei vincoli)

Per descrivere la superficie la parametrizzo con delle carte locali



Cioè mappe da U_i (aperto di $\mathbb{R}^2$) in $\mathbb{R}^3$ in modo che ① $\bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(U_i) = S$

② le mappe sono C^1 e iniettive

③ nell'intersezione $\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$

le due parametrizzazioni sono compatibili

cioè $\forall$ $\vec{x} \in \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$ se $(u_1, v_1) = \varphi_1^{-1}(x)$

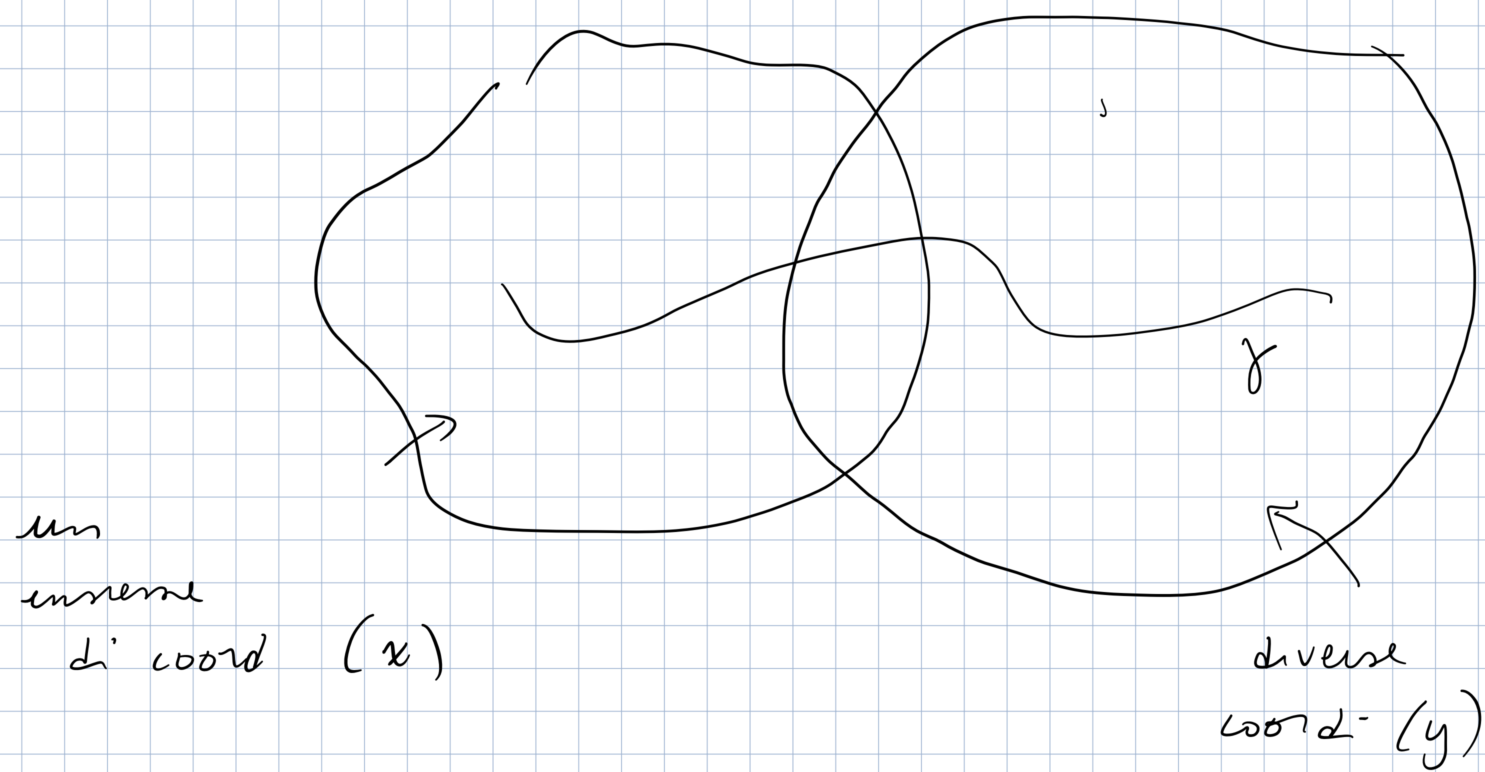
e $(u_2, v_2) = \varphi_2^{-1}(x)$ allora $\exists$ $B_{r_1}(u_1, v_1)$

$B_{r_2}(u_2, v_2)$ e un diffeo

$B_{r_1}(u_1, v_1) \xrightarrow{\psi} B_{r_2}(u_2, v_2)$ t.c. $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$

in $B_{r_2}(u_2, v_2)$

Anche su $\mathbb{R}^n$ posso mettere coordinate locali



purché dove sono definite entrambe

il cambiamento di coordinate sia un diffeomorfismo $\psi : Y \to X$

Se ho una curva $t \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$

se nelle X è descritta come $\vec{x}(t)$

e nelle y come $\vec{y}(t)$ si deve avere

nell'intersezione $\vec{x}(t) = \psi(\vec{y}(t))$

per descrivere il campo vettoriale di

cui γ è il flusso $V(x)$, $W(y)$

nell'intersezione $W(y) = \psi_* V(x) \stackrel{?}{=} (J\psi)^{-1} V(\psi)$

Nota bene. una mappa C^1 $\mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$

può essere associata ad una "derivazione"

cioè ad una mappa $x \to V(x)$ associo

l'operatore (che agisce sulle funzioni $U \to \mathbb{R}$)

$$L_V \equiv \sum V_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$L_V[f] = \sum V_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

L_V è una derivazione nel senso che rispetta

la regola di Leibnitz.

$$L_V(fg) = (L_V f) g + (L_V g) f$$

Questa identificazione fra campi vettoriali e derivazioni rispetta la struttura di Lie

Esercizio: Verificare che

$$L_{[V,W]} = L_V L_W - L_W L_V$$

se ho due insiemi di coordinate

$$y \longrightarrow x = \psi(y)$$

A L_V devo far corrispondere $\psi_* L_V = L_W$

in modo che $L_W f(\psi(y)) = (L_V f)(\psi(y))$

cioè $L_W = \sum W_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}$

$$\sum_j W_j(y) \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\psi(y)) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} = \sum_i V_i(\psi(y)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\psi(y))$$

cioè $W = (J\psi)^{-1} V = \psi_* V$

quindi la corrispondenza $V \rightsquigarrow L_V$

è "covariante" rispetto ai cambi di coordinate

Questo significa che posso identificare

i campi vettoriali (mappe $V \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ $(U \subset \mathbb{R}^n)$

che definiscono un flusso $\dot{x} = V(x)$)

con le derivazioni (mappe $V \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

che definiscono un operatore del prim'ordine

sulle funzioni $U \to \mathbb{R}$ $\quad L_V(f) = \sum V_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$)

è conveniente usare sempre la notazione delle

derivazioni.

Cioè $\quad V = \sum V_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

in questo modo

$$[V, W] = \sum_{i,j} V_j \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} - W_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Def. [C.V. omogeneo]

Dico che V definito su $\mathbb{R}^n / \{0\}$

è omogeneo di grado d (ha scaling d)

se $\forall\, \lambda > 0$ posto $\phi(y) = \lambda y$

si ha $\phi_* V(y) = \lambda^d V(y)$

In coordinate

$$\sum V_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum V_i(\lambda y) \frac{\partial}{\partial \lambda y_i}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum V_i(\lambda y) \frac{\partial}{\partial y_i} = \lambda^d \sum V_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \iff$$

tutte le componenti V_i sono omogenee

di grado $d+1$!

Definiamo per $a \in \mathbb{N}^n$ $j \in (1, \dots, n)$

il "monomio" $m_{aj} := x^a \frac{\partial}{\partial x_j}$ $\quad x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$

Lo scaling di $M_{a,J}$ è $\sum a_i - 1 = |a|_1 - 1$

Lemma: Verificare che

$$\left[x^a \frac{\partial}{\partial x_J}, x^b \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = b_J x^{a+b-e_J} \frac{\partial}{\partial x_i} - a_i x^{a+b-e_i} \frac{\partial}{\partial x_J}$$

e quindi dati due campi vettoriali

polinomiali omogenei (polinomi omogenei)

$$P = \sum_{J=1}^{n} \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ |a|_1 = d_P + 1}} P_{a,J} \, x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$

$$Q = \sum_{J=1}^{n} \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^n \\ |a|_1 = d_Q + 1}} Q_{a,J} \, x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$

Verificare che $[P, Q]$ è un polinomio omogeneo di scaling $d_P + d_Q$

OSSERVAZIONE in più

Lo scaling dota i campi vettoriali polinomiali di una struttura di

algebra di Lie graduata

cioè dati due c.v. polinomiali il loro commutatore è un c.v. polinomiale
inoltre il commutatore rispetta le componenti omogenee e rispetta le proprietà di un prodotto di Lie cioè un "prodotto"

1. bilineare

2. antisimmetrico

3. Identità di Jacobi

$$[[a,b],c] + [[c,a],b] + [[b,c],a] = 0$$

A partire dai c.v. polinomiali definiamo i c.v. analitici e limitati

$B_r(0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ come le serie

tot. convergenti

$$V(x) = \sum_{a,J} V_{a,J} \; x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$ con la condizione

(x esempio)

$$|V|_r := \sum_{a,J} |V_{a,J}| \, r^{|a|_1 - 1} < \infty$$

N.B se scrivo $V = \begin{pmatrix} V_1(x) \\ \vdots \\ V_n(x) \end{pmatrix}$

con $V_i(x) = \sum_a V_{a,i} \, x^a$

si ha che

$$\sup_{x \in B_r(0)} |V(x)|_1 \leq r |V|_r$$

Proposizione.

① Se $V = \sum_{|a| \geq d+1} V_{a,j}\, x^a \frac{\partial}{\partial x_j}$ con $|V|_{R_0} < \infty$

si ha $\forall\ r \leq R_0$ $|V|_r \leq \left(\frac{r}{R_0}\right)^d |V|_{R_0}$

② Se $|V|_r\,, |W|_r < \infty$

si ha $\forall\ r' < r$

$$|[V, W]|_{r'} \leq c\, \frac{r}{r - r'}\, |V|_r\, |W|_r$$

Note Bene

$[V, W] =$

$$\sum_{j,a} \Big(\sum_{a_1 + a_2 = a + e_j} \sum_i \big(V_{i,a_1} W_{j,a_2} - W_{i a_1} V_{j a_2} \big) a_{2i} \Big)\, x^a \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Possiamo definire anche le mappe analitiche $\phi : B_r(0) \longrightarrow B_R(0)$

$\phi = (\phi_1, \ldots \phi_m)$

$$\Phi_i = \sum \phi_{a,i} \, x^a$$

con la norma $\sup_{x \in B_r} |\phi|_1$

Proposizione se $0 < \rho < r$ e S un c.v. analitico tale che

$$|S|_{r+\rho} \leq \delta := \frac{\rho}{8e(r+\rho)}$$

Allora il flusso del c.v. S

$$\begin{cases} \dot{x} = S(x) \\ x(0) = y \end{cases} \qquad y \longrightarrow \phi_S(\tau, y)$$

è ben definito fino a $\tau = 1$ inoltre

$\psi(y) := \phi_S(1, y)$ è ben definito

ed analitico con

$$\sup |\psi(y) - y|_1 \leq (r+\rho)|S|_{r+\rho}$$

$y \in B_r(0)$

inoltre $\forall$ c.v. analitico V

$|V|_{r+\rho} < \infty$ si ha che

$e^{\mathrm{ad}S} V$ è analitico e soddisfa

$$\left| e^{[S,\cdot]} V \right|_r \leq 2 |V|_{r+\rho}$$

$$\left| e^{[S,\cdot]} V - V \right|_r \leq \delta^{-1} |V|_{r+\rho} |S|_{r+\rho}$$

In generale $\forall$ sequenze $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con

$|c_k| \leq \frac{1}{k!}$ si ha

$$\left| \sum_{k \geq h} c_k (\mathrm{ad}S)^k V \right|_r \leq 2 |V|_{r+\rho} \left(\frac{|S|_{r+\rho}}{2\delta} \right)^h$$

Perché voglio lavorare nell'algebra dei c.v. analitici?

Consideriamo un c.v. analitico

$$V = (Ax)\partial + \sum V_{a,i} x^a \partial$$

$V = (\lambda x)_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|a|\geq 2} V_{a,i}\, x^a \frac{\partial}{\partial x_i}$

con $|V|_{R_0} < \infty$

Se A è diagonalizzabile possiamo

sempre diagonalizzare la parte lineare

($x = My$ con $M^{-1}AM = \text{diag}$)

quindi assumiamo che A sia diagonale

$V = \sum_i \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|a|\geq 2} V_{a,i}\, x^a$

$V = D + V^{(\geq 1)}$

dove l'apice ≥ 1 ricorda che

NON ci sono termini con scaling $d = |a| - 1 = 0$

Ipotesi semplificatrice

Chiedo che $\forall\ a_1, \dots, a_n \geq 0$ con $|a|_1 \geq 2$

si abbia $\sum \lambda_i a_i - \lambda_j \geq c > 0$

Considero $V = D + V^{\geq 1}$ analitico in B_{R_0}

Proposizione (Poincaré)

$\exists\ r_0 \ll 1$ e un cambiamento di coord.

analitico $\Phi : B_{\frac{r_0}{2}}(0) \to B_{r_0}(0)$

tale che $\Phi_* V = D$

Dimostrazione formale

cerco Φ come il flusso di S

$S = \sum_{d \geq 1} S^{(d)}$ dove ciascuna $S^{(d)}$

è omogenea di scaling d

scrivo $$V = D + \sum_{d\geq 1} V^{(d)}$$

$$e^{[S}\left(D + V^{\geq 1}\right) =$$

$$D + V^{\geq 1} + [S, D] + [S, V^{\geq 1}] + \sum_{k\geq 2} \frac{(\mathrm{ad}\, S)^k}{k!}(D+V) =$$

$$= D \qquad (\text{scaling} = 0)$$

$$+ \; V^{(1)} + [S^{(1)}, D] \qquad (\text{scaling} = 1)$$

$$+ \; V^{(2)} + [S^{(2)}, D] + [S^{(1)}, V^{(1)}] + \frac{1}{2}[S^{(1)}, [S^{(1)}, D]] \qquad (\text{scaling } 2)$$

$\vdots$

$+$

ora posso fissare iterativamente $S^{(d)}$

in modo da cancellare tutti i termini

di scaling positivo

$d=1$ scelgo $S^{(1)}$ in modo

che $[S^{(1)}, D] = -V^{(1)}$

$$S^{(1)} = \sum_{|a|=2} S_{a,J}\, x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$

$$D = \sum \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$[D, S^{(1)}] =$$

$$\sum_{|a|=2} S_{a,J} \sum_i \lambda_i a_i \frac{\partial}{\partial x_J} - \sum_i \lambda_i \sum_J S_{a,J}\, x^a \delta_{iJ} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{|a|=2} S_{a,J} \left(\sum_i \lambda_i a_i - \lambda_J\right) x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$

quindi (Rem $\lambda \cdot a - \lambda_J \geq c > 0$)

$[D, S^{(1)}] = V^{(1)}$ basta porre per

$|a| = 2$

$$S_{a,J} = \frac{V_{a,J}}{\lambda \cdot a - \lambda_J}$$

$$S^{(1)} = \sum_{|a|=2} \frac{V_{a,J}}{\lambda \cdot a - \lambda_J}$$

questo garantisce che $e^{[S}(D+V) = D + R^{\geq 2}$

ora fisso $S^{(2)}$ in modo che sia $=0$ anche il termine di scaling $d=2$

$$V^{(2)} + [S^{(2)}, D] + [S^{(1)}, V^{(1)}] + \frac{1}{2}[S^{(1)}, [S^{(1)}, D]]$$

Noti

trovo sempre

$$[D, S^{(2)}] = F^{(2)} \quad \text{dove } F^{(2)} \text{ è Noto!}$$

quindi $$S^{(2)}_{a,J} = \frac{F^{(2)}_{aj}}{\lambda \cdot a - \lambda_J}$$

e vado avanti !

Dimostrazione vera col TFI !