$f : E \to F$

prendo x_0 in cui f sia continua

① f ha le derivate direzionali in x_0

se $\forall h \neq 0 \quad h \in E$ esiste

$$\partial_h f(x_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

② f è G- differenziabile se $\exists\, \ell \in \mathcal{L}(E,F)$

(funzioni lineari continue da E in F)

t.c. $\forall h \neq 0 \quad h \in E \qquad \partial_h f(x_0) = \ell[h]$

(f è G- diff. in un intorno $I \in E$ se

$\forall x \in I \quad \exists\, \ell(x)[\cdot] \in \mathcal{L}(E,F)$ t.c.

$\partial_h f(x) = \ell(x)[h]$)

③ f è F- differenziabile in x_0 se è G- diff. in x_0

e $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - \ell(x_0)[h] \|_F}{\|h\|_E} = 0$

④ Se f è G-diff in un intorno I di x_0

e la mappa $x \longrightarrow \ell(x)[\cdot]$

$E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$

è continua in x_0 allora

f è F-diff. in x_0 si dice $f \in C^1(E,F)$

Dimostriamo che se $x \longrightarrow \ell(x)[\cdot]$ è continua in x allora f è F-diff.

Dato che f è G-diff in un intorno di x_0

$\forall h \neq 0$ suff piccola

$g(\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon h)$ è derivabile

in un intorno $|\varepsilon| < 1$

per il teorema di Lagrange

$$g(1) - g(0) = g'(\varepsilon^*)$$

ma $g'(\varepsilon^*) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon_* h + \delta h) - f(x_0 + \varepsilon_* h)}{\delta}$

$$= \partial_h f(x_0 + \varepsilon_* h) = \ell(x_0 + \varepsilon_* h)[h]$$

(la prima uguaglianza viene dalla def. di derivata direzionale; la seconda dalla G-differenziabilità in I)

quindi $\varepsilon_* \in (-1,1)$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \ell(x_0 + \varepsilon_* h)[h]$$

ora sostituisco nella definizione di differenziale di Fréchet

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - \ell(x_0)[h]|_F}{|h|_E} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left| \left(\ell(x_0 + \varepsilon_x h) - \ell(x_0) \right)[h] \right|_F}{|h|_E}$$

ma

$$e \leq \frac{\left| \left(\ell(x_0 + \varepsilon_x h) - \ell(x_0) \right)[h] \right|_F}{|h|_E} \leq \frac{\| \ell(x_0+\varepsilon_x h) - \ell(x_0) \|^{op} |h|_E}{|h|_E}$$

e dato che $x \longrightarrow \ell(x)$ è continua

e $\varepsilon_x \in (-1,1)$

$$\| \ell(x_0+\varepsilon h) - \ell(x_0) \|^{op} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(Bisogna solo convincersi che $g : \mathbb{R} \longrightarrow F$ derivabile $\Rightarrow$ vale il teorema di Lagrange.)

(forse è + facile in forma integrale

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt$$

e poi segue uguale.