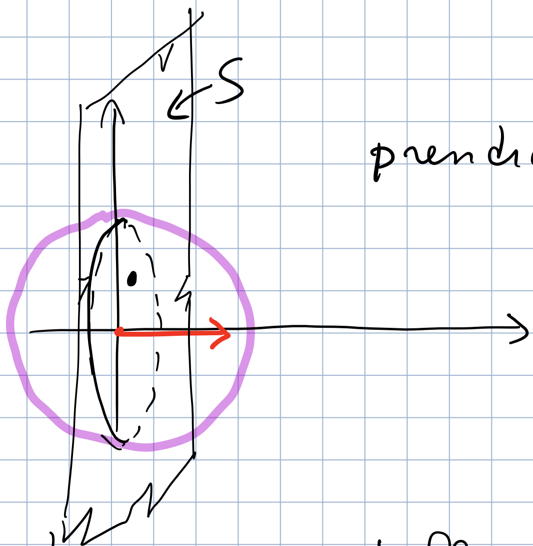
Il teorema di rettificazione di Poincaré

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

scegliamo un dato iniziale x_0 t.c. $f(x_0) \neq 0$

A meno di un cambiamento di coordinate AFFINE ed indip. dal tempo assumiamo che $x_0 = 0$; e $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$



prendiamo una sezione

$$S := \{ x : x_1 = 0 \}$$

Considero una palla intorno a $x_0 = 0$ (raggio δ)

per ogni punto $\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z \in S \cap B(\delta)$

e $\tau \in [-a, a]$ si consideri la mappa

$(\tau, \xi) \longrightarrow \phi(\tau, \xi)$

ϕ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\phi} = f(t, \phi) \\ \phi(t_0) = \xi \end{cases}$$

Voglio mostrare che $(\tau, \xi) \to x = \phi(\tau, \xi)$ è un diffeo!

Applico il Teo. Funz. Inversa a

$$x = \phi(\tau, \xi) = \xi + \int_0^{\tau} f(s, \phi(s, \xi))\, ds$$

① ϕ è C^1 in tutte le sue variabili

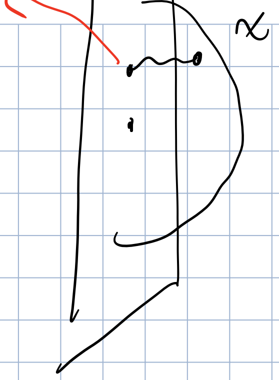
inoltre

e $J_{\tau,\xi}\, \phi(0,0,0) = \begin{vmatrix} 1 & - & - & - \\ 0 & & & \\ 0 & & -\mathbb{1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$

quindi localmente in una piccola palla

$B_{\delta_1}(0)$ $\exists$ $x \to (\tau(x), \xi(x))$ funzione C^1

che inverte



$\tau(x)$ è il tempo che ci si mette ad andare da $\xi(x)$ a x.

Nelle coordinate (τ, ξ) la dinamica è semplicemente

$$\dot{\tau} = 1$$
$$\dot{\xi} = 0$$

!

N.B. Se f è un campo Hamiltoniano allora la mappa $(\tau, \xi) \longrightarrow x(\tau, \xi)$ è simplettica !

N.B. questo vuol dire che vicino a un punto non singolare qualsiasi ODE ha $n-1$ costanti del moto LOCALI

Questo NON VUOL DIRE che tali costanti del moto sono definite su tutto lo spazio delle FASI !

Nel caso di un sistema Hamiltoniano di dim $2N$ ci sono $2N-1$ cost. del moto locali (Teorema di Carathéodory-Jacobi)

Ma al più n cost. del moto in involuzione tra loro Globali!

(Cioè fino a che siamo nella piccola palla in cui valgono le ipotesi del teorema di rettificazione ci sono un sacco di cost. del moto, però dato che $f(x_0) \neq 0$ nella palla $B_\delta(0)$ la dinamica resta per tempi BREVI;

appena esce dalla palla si perdono le c.o.m.

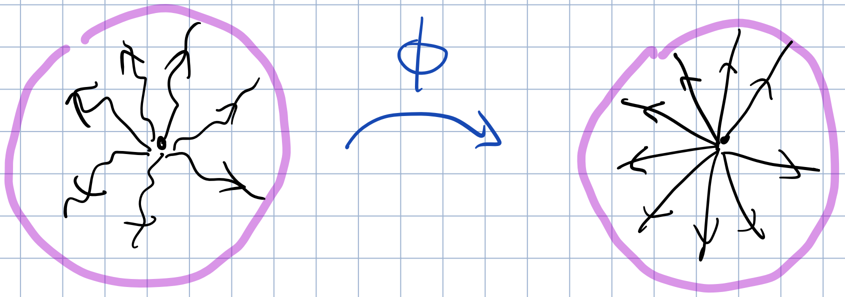
— . — . —

Trovare un cambio di variabili che semplifica il campo vettoriale in un intorno di un punto singolare è più complicato

In particolare se il punto fisso è STABILE trovare una forma normale che risultati per tempi lunghi

(o 'potenzialmente' ∞)

Per esempio se ho una sorgente



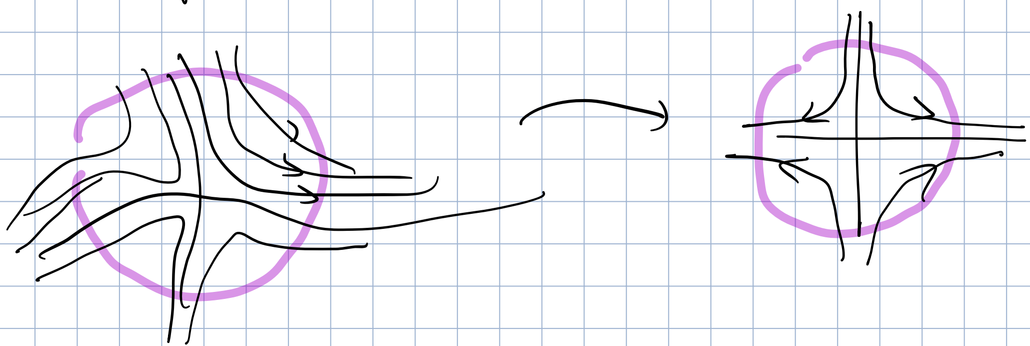
e trovo un diffeo ϕ che coniuga la dinamica

a un moto rettilineo radiale

dopo un tempo finito la dinamica

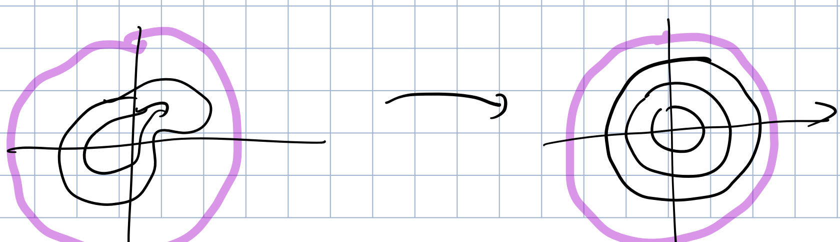
esce dalla palla in cui si può

"rettificare"   idem



a parte per gli assi $\hat{x}, \hat{y}$ tutte

le traiettorie escono dalla palla



la dinamica resta nella palla per tempi infiniti