

Vedere lezione precedente per Gronwall
in forma differenziale + confronto

Esercizio Importante:

$$\begin{cases} u' = \sqrt{u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v' = 2\sqrt{v} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

posso concludere che $v(t) \geq u(t) \forall t$?

Un ultimo **ESERCIZIO** di fuga dai competi

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\forall x \in B_{2R}(0) \quad |f(x) \cdot \hat{x}| < \varepsilon$$

$$\hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

consideriamo

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$u_0 \in B_R(0)$$

Dimostrare che $u(t) \in B_{2R}(0)$

$\forall |t| < T := \frac{R}{\varepsilon}$ (per di $[-T, T] \subset I_{\max}$)

suggerimento scrivere l'equazione differenziale

per $z(t) = |u(t)| = \sqrt{u(t) \cdot u(t)}$

però in forma integrale

RAGIONARE per ASSURDO!

Abbiamo visto che in generale non si può sperare di conoscere le traiettorie di una ODE. Anche trovare le orbite o non ci sono contenuti del moto (o se il sistema NON è in \mathbb{R}^2) è molto complicato.

Vogliamo quindi capire la forma qualitativa delle soluzioni.

APPROCCIO DI FORMA NORMALE:

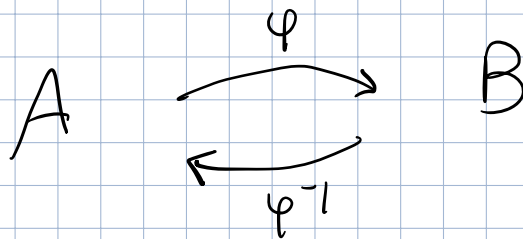
Cerco un cambiamento di variabile che rende il mio sistema dinamico il più semplice possibile

Diffeomorfismi

una mappa $\varphi: C^1(A, \mathbb{R}^n)$ ($A \subset \mathbb{R}^n$)

invertibile con inversa C^1

(NOTA BENE questo vuol dire che $J\varphi$ è invertibile in A)



Consideriamo ora una ODE in A

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

(supponiamo che $u(t) \in A$)

$$\forall t \in (a, b) \quad u \in C^1((a, b), A)$$

posso porre $v(t) = \varphi(u(t))$ ($v \in C^1((a, b), B)$)

calcoliamo l'eq. diff. che soddisfa v

$$\dot{v}(t) = J\varphi(u(t)) \dot{u}(t) = J\varphi(u(t)) f(u(t))$$

III

$$= J\varphi(\varphi^{-1}(v(t))) f(\varphi^{-1}(v(t)))$$

$$\begin{cases} \dot{v} = g(v) \\ v(0) = \varphi(u_0) \end{cases} \quad \text{dove}$$

$$g(v) //$$

$$\text{si intende } g(v) = \varphi^* f$$

N.B. si scrive in modo + semplice in

$$\text{termini di } \psi \equiv \varphi^{-1} \quad u(t) = \psi(v(t))$$

$$\dot{u} = J\psi(v(t)) \dot{v}$$

e ricordando che $\forall x \in B$ $J\psi(x)$ è invertibile

$$\dot{v} = (J\psi(v))^{-1} f(\psi(v))$$

supponiamo che in entrambi i sistemi

valga esistenza e unicità globale

allora finché $v(t) \in B$ si $\dot{v} = g(v)$

allora $u(t) = \psi(v)$ risolve $\dot{u} = f(u)$

e vice versa.

Naturalmente si possono anche considerare
combinamenti di coordinate dipendenti

dal tempo $u(t) = \psi(v(t), t)$

Esercizio.

se $\dot{u} = f(u)$ scrivere l'ODE per v

Esempio

$$\dot{x} = 1 - \log(t+x)$$

$$y(t) = x(t) + t$$

$$\dot{y} = \dot{x} + 1 = 2 - \ln(y)$$

$$(I_{\max} = \mathbb{R})$$

