Data $A \in mat(n \times n)$ voglio

scriverla in modo da poter calcolare

l'esponenziale $\quad A = D + N \quad [D,N]=0$

D: diagonalizzabile $\quad N$: Nilpotente

LEMMA 1; se $V = V_1 \oplus V_2$

e $AV_1 \subseteq V_1 \quad AV_2 \subseteq V_2$

allora posso rappresentare A tramite

una matrice a blocchi

DIM.

prendo una base per $V_1 = \{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_h\}$

una base per $V_2 = \{\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{n-h}\}$

$$L = \begin{pmatrix} | & | \\ f_i & g_i \\ | & | \end{pmatrix} \qquad L^{-1} A L = B$$

B è diagonale a blocchi

dimostra direttamente $\qquad$ infatti

$$L\underline{e}_i = \begin{cases} \hat{f}_i & \text{se} \quad i \le h \\ \hat{g}_{i-h} & \text{se} \quad i > h \end{cases} \qquad \begin{aligned} L^{-1}\hat{f}_i &= \underline{e}_i \\ L^{-1}\hat{g}_i &= \underline{e}_{i+h} \end{aligned}$$

e per ipotesi di stabilità $A\hat{f}_j$ è combinazione lineare degli $\hat{f}_i$ $\left(A\hat{f}_j = \sum_{j=1}^{h} \alpha_{ij}\hat{f}_i \right)$

stesso per $A\hat{g}_j$ $\left(A\hat{g}_j = \sum_{j=1}^{n-h} \beta_{ij}\hat{g}_i \right)$

FISSO $j \le h$

$$B\underline{e}_j = L^{-1}A\hat{f}_j = L^{-1}\sum \alpha_{ij}\hat{f}_i = \sum_{j=1} \alpha_{ij}\underline{e}_i$$

ma per definizione $B\underline{e}_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\underline{e}_i$

quindi se $j \le h$ $\quad B_{ij} = \alpha_{ij}$ se $i \le h$

$B_{ij} = 0$ altrimenti

Ripeto per $j > h$

$$\Rightarrow B = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} \alpha \in \text{mat}(h \times h) \\ \beta \in \text{mat}(n-h \times n-h) \end{array}$$

<u>Corollario</u>: se A ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile

matrici Autoaggiunte:

A è AUTOAGGIUNTA se $\bar{A}^T = A$

LEMMA

se $\lambda \in \mathrm{spec}(A) \Rightarrow \lambda$ è reale

infatti $Av = \lambda v$ implica

$$\langle Av, v\rangle = \lambda |v|^2$$

$$\| $$

$$\langle v, \bar{A}^T v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda} |v|^2$$

$\blacksquare$

LEMMA

se A è autoaggiunta autovettori relativi a autovalori diversi sono $\perp$

infatti $Av = \lambda v$ e $Aw = \mu w$

implica che

$$\langle w, Av\rangle = \lambda \langle w, v\rangle$$

$$\|$$

$$\langle A^+ w, v\rangle = \langle Aw, v\rangle = \mu \langle w, v\rangle$$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle w, v\rangle = 0$

cioè $w \perp v$

$\blacksquare$

Nota bene:

se A è autoaggiunta e reale $\Rightarrow$ gli autovettori $\in \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Teorema spettrale: } A \text{ autoaggiunta è diagonalizzabile.}}$

Dimostrazione 1: sia V_i l'autospazio dell'autoval. λ_i $\quad u \in V_i \Rightarrow Au = \lambda_i u$

sia $V = \bigoplus V_i$ e consideriamo

il complemento ortogonale di V in $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{C}^n = V \oplus W \qquad W \perp V$$

se $W = 0$ allora ho finito perché

costruisco una base ortonormale in ciascun V_i

la matrice U con colonne tale base è unitaria (le colonne sono $\perp$) e diagonalizza.

se $\dim W \geq 1$

ora prendiamo un $u \in V_i$ $\qquad Au = \lambda_i u$

$$u \cdot Aw = \lambda_i u \cdot w = 0 \qquad (W \perp V)$$

$$\Rightarrow Aw \perp V \quad \Rightarrow \quad Aw \in W$$

quindi W è stabile per A

allora per il Lemma 1 $\exists$ una base per $\mathbb{R}^n$

in cui A è diagonale a blocchi

$$L^{t} A L = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$$

posso scegliere gli $\hat{f}_i$ e $\hat{g}_i$ ortonormali ($W \perp V$) quindi L è unitaria!

ora β ha almeno 1 autovalore

il che vuol dire che c'è un autovettore in W

ma $W \cap V = 0$ e V contiene tutti gli autovettori

e ottengo un assurdo $\boxtimes$

Nota Bene

$$A = \sum \lambda_i \Pi_i$$

Π_i è la proiezione ortogonale su V_i

Dim 2. (per induzione sulla dimensione)

considero $N = A - \lambda_1 \mathbb{I}$ e determino

$Ker(N)$ (che non è $\vec{0}$ dato che λ_1 è un autovalore) chiamo $d_1 = \dim(Ker(N))$

(d_1 è la molteplicità geometrica di λ_1)

Suddivido $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(N) \oplus W$

dove W è il complemento ortogonale di $\operatorname{Ker}(N)$ posso costruire una base ortonormale i cui primi d_1 vettori sono nel Ker. La matrice L del cambio di base quindi è UNITARIA

(infatti le colonne di L sono i vettori di base e dato che sono ortonormali $LL^+ = \mathbb{1}$ cioè L è UNITARIA)

pongo $B = L^{-1} A L$ dato che $L^{-1} = L^+$ e A è autoaggiunta B è ancora autoaggiunta.

D'altro canto dato che $\operatorname{Ker}(B - \lambda_1 \mathbb{1}) = \operatorname{span}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{d_1})$ (il Ker è generato dai primi d_1 vettori della base)

$$B - \lambda_1 \mathbb{1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_1 \\ \hline 0 & B_2 - \lambda_1 \mathbb{1} \end{array}\right)$$

ma dato che la matrice è AUTOAGGIUNTA

allora $B_1 = O^+ = 0$ quindi B è diagonale

a blocchi.

$$L^{-1} A L = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{1} & O \\ \hline O & B_2 \end{array} \right)$$

inoltre dato che $\ker(B - \lambda_1 \mathbb{1}) = \text{span}(e_1, \dots e_{d_1})$

$B_2 - \lambda_1 \mathbb{1}$ è INVERTIBILE $\Rightarrow$ B_2 non ha

λ_1 fra gli autovalori. $\Rightarrow d_1 \equiv$ molteplicità

algebrica dell' autovalore λ_1.

(Rem. il polinomio caratteristico è uguale

in qualsiasi base)

Decomposizione di Jordan.

data una matrice A e $\lambda_1, \dots \lambda_K$

i suoi autovalori. Scelgo un autovalore

(che chiamo λ_1)

$N = A - \lambda_1 \mathbb{I}$ $\qquad \ker(N) \neq \vec{0}$

chiamo $d_1 = \dim(\ker(N))$ (molteplicità geometrica)

OSSERVAZIONE: se costruisco una base in cui i primi d_1 vettori sono in $\ker(N)$ e scrivo A in tale base

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{I} & B_1 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$$

ma NON necessariamente $B_1 = 0$!

calcolo $\ker(N) \subseteq \ker(N^2) \subseteq \ker(N^3)$ etc.

dato che sono tutti sottospazi in $\mathbb{C}^n$

a un certo punto $\ker(N^\nu) = \ker(N^{\nu+1})$

(sia ν il più piccolo numero per cui è vero!)

sia $\nu_i := \{\min p$ t.c. $\ker K_i^p = \ker N_i^{p+1}\}$

Nota Bene 1: $\ker(N^{\nu+k}) = \ker(N^\nu) \quad \forall k > 0$

infatti se $\ker(N^\nu) = \ker(N^{\nu+1})$

allora se $v \in \mathrm{Ker}(N^{\nu+2})$ $\left(N^{\nu+2} v = 0 \right)$

si ha $Nv \in \mathrm{Ker}(N^{\nu+1}) \overset{-}{=} \mathrm{Ker}(N^{\nu})$

quindi $N^{\nu}(Nv) = N^{\nu+1} v = 0$

cioè $\mathrm{Ker}(N^{\nu+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(N^{\nu+2}) \subseteq \mathrm{Ker}(N^{\nu+1})$

che implica che gli spazi SONO UGUALI.

Nota bene 2: $\mathrm{Ker}(N^{\nu}) \cap \mathrm{Im}(N^{\nu}) = \vec{0}$

infatti se $v \in \mathrm{Ker}(N^{\nu}) \Leftrightarrow N^{\nu} v = 0$

e $v \in \mathrm{Im}(N^{\nu}) \Leftrightarrow \exists u : N^{\nu} u = v$

allora $N^{2\nu} u = N^{\nu} v = 0 \Rightarrow$

$u \in \mathrm{Ker}(N^{2\nu}) = \mathrm{Ker}(N^{\nu}) \Rightarrow v = N^{\nu} u = 0$ ∎

Quindi $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(N^{\nu}) \oplus \mathrm{Im}(N^{\nu})$

chiamiamo $m_1 = \dim(\mathrm{Ker}(N^{\nu}))$

e costruiamo una base in cui i primi m_1 vettori sono nel $\mathrm{Ker}(N^{\nu})$, i restanti in $\mathrm{Im}(N^{\nu})$ sia L_1 la matrice del cambiamento di base.

$$B = L_1^{-1} A L_1 \qquad M = L_1^{-1} N L_1 = B - \lambda_1 \mathbb{I}$$

$$M^{\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{0}^{m_1} & \alpha \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$$

(dato che i primi m_1 vettori sono nel $\mathrm{Ker}(M^{\nu})$)

ma dato che $\underline{e}_{m_1+1}, \dots \underline{e}_n$ sono una base per $\mathrm{Im}(M^{\nu})$

$$M^{\nu} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} m_1 \\ w \\ | \end{pmatrix}$$

ma $M^{\nu} v = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} v_K \\ \hline v_I \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \alpha v_K \\ \beta v_I \end{pmatrix}$

quindi $\alpha = 0$ e M^{ν} è diagonale a blocchi

quindi $M^{\nu} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$

β deve essere invertibile (altrimenti ho degli ulteriori vettori nel Ker)

ora naturalmente M commuta con M^{ν} quindi si rappresenta

M a blocchi rispetto a

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(N^\nu) \oplus \operatorname{Im}(N^\nu)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{KK} & M_{KI} \\ \hline M_{IK} & M_{II} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & M_{KI}\beta \\ \hline 0 & M_{II}\beta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M_{KK} & M_{KI} \\ \hline M_{IK} & M_{II} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \beta M_{IK} & \beta M_{II} \end{array}\right)$$

dato che β è invertibile

$$0 = [M, M^\nu] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & M_{KI}\beta \\ \hline -\beta M_{IK} & [M_{II}, \beta] \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} M_{KI} = 0 \\ M_{IK} = 0 \end{array}$$

Ho dimostrato che $L_1^{-1} N L_1 =: M$ è

diagonale a blocchi

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{KK} & 0 \\ \hline 0 & M_{II} \end{array}\right) \quad \text{con } \beta = M_{II}^\nu \text{ e } M_{KK}^\nu = 0$$

Dimostrazione alternativa (+ elegante)

Sia $\ker(N^\nu)$ che $\operatorname{Im}(N^\nu)$ sono stabili rispetto all'azione di N

DIM: se $v \in \ker(N^\nu)$

allora $Nv \in \ker(N^{\nu+1})$ (per definizione)

ma dato che $\ker N^{\nu+1} = \ker N^\nu$

allora $Nv \in \ker(N^\nu)$ e $\ker(N^\nu)$ è stabile

d'altra canto se $v \in \operatorname{Im} N^\nu$ $v \neq 0$

allora $\exists\, u$: $N^\nu u = v \Rightarrow N^\nu N u = Nv$

$\left(\operatorname{Im}(N^\nu) \cap \ker(N^\nu) = \vec{0} \right.$ allora $\left. Nv \neq 0 \right)$

e $w = Nu$ soddisfa $N^\nu w = Nv$ quindi

$Nv \in \operatorname{Im}(N^\nu)$ ◼

Quindi per il Lemma 1. $\exists$ una base

in cui N è diagonale a blocchi

(la stessa base che abbiamo costruito) prima!

$$M = L_1^{-1} N L_1 = \left(\begin{array}{c|c} M_{KK} & 0 \\ \hline 0 & M_{II} \end{array}\right)$$

ora $\quad \operatorname{Ker} M^\nu = \operatorname{Span}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{m_1})$

$\quad \operatorname{Im} M^\nu = \operatorname{Span}(\underline{e}_{m_1+1}, \dots, \underline{e}_n)$

quindi $\quad M^\nu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M_{II}^\nu \end{array}\right)$

ma $\quad M_{II}^\nu = \beta \quad$ deve essere invertibile

$\Rightarrow \quad M_{II}$ è invertibile $\blacksquare$

Ritorniamo alla matrice di partenza

ponendo $\quad B = L_1^{-1} A L_1 \quad$ si ha

$B - \lambda_1 \mathbb{I} = M \quad$ quindi

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{I} + M_{KK} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 \mathbb{I} + M_{II} \end{array}\right)$$

Ora calcolo il polinomio caratteristico di B (che è = a quello di A)

$$\det(B - \lambda \mathbb{1}) =$$
$$\det(M_{KK} + (\lambda_1 - \lambda)\mathbb{1}) \det(M_{II} + (\lambda_1 - \lambda)\mathbb{1})$$

ora dato che M_{KK} è nilpotente

$$\det(M_{KK} + (\lambda_1 - \lambda)\mathbb{1}) = (\lambda - \lambda_1)^m$$

inoltre dato che M_{II} è invertibile

$\det(M_{II} + (\lambda_1 - \lambda)\mathbb{1})$ non si annulla in $\lambda = \lambda_1$

quindi m = molteplicità algebrica di λ_1.

In conclusione $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(N^\nu) \oplus \operatorname{Im}(N^\nu)$ definisce una base che coniuga A

in forma diagonale a blocchi

$$L_1^{-1} A L_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{I} + M_{KK} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 \mathbb{I} + M_{II} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & \\ \hline & B_2 \end{array}\right)$$

per costruzione gli autovalori di

$$B_2 = \lambda_1 \mathbb{I} + M_{II}$$

sono $(\lambda_2, \dots \lambda_k)$ (tutti gli autoval di A) tranne λ_1

inoltre $B_1 = \lambda_1 \mathbb{I} + M_{KK} = D_1 + N_1$

(diagonale + nilpotente che commutano)

Ora siamo pronti a dimostrare la decomposizione di Jordan per induzione sulla dimensione.

Sia $A \in Mat\ n \times n$ allora $\exists\ L$ invertibile tale che $L^{-1} A L = D + N$

con $[D, N] = 0$; D diagonale e N nilpotente.

Equivalentemente $A = A_1 + A_2$ con

A_1 diagonalizzabile

A_2 nilpotente e $[A_1, A_2] = 0$

Dimostrazione:

Se $n = 1$ è ovvio,
Supponiamo che la decomp. sia vera fino a $n-1$ e dim per Mat $(n \times n)$

Data $A \in$ Mat $(n \times n)$ e sia λ_1 un suo autovalore seguo lo schema descritto prima

$$L_1^{-1} A L_1 = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right)$$

Per ipotesi induttiva dato che B_2 è di dimensione più piccola di A $\Rightarrow$ si può scrivere in blocchi di Jordan.

cioè $D_2 + N_2 = L_2^{-1} B_2 L_2$ con

$L_2 \in \mathrm{Mat}(n-m_1 \times n-m_1)$, $[D_2, N_2] = 0$

ma allora

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbb{1}}^{m_1} & 0 \\ \hline C & L_2^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_1 & \\ \hline & B_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & L_2 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 + N_2 \end{array}\right)$$

$\blacksquare$