Partiamo da $\dot{x} = D + V$

con $D = \sum \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $V \in \mathcal{A}_{R_0}^{\geq 1}$

(REM quando scrivo $\dot{x} = D + V$ vuol dire che al II° membro $D + V$ lo penso come un elemento di $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + V_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + V_n \end{cases}$$

Ipotesi di non-RISONANZA fino ad ordine N:

$\forall$ $j = 1, \dots, n$ $\forall a \in \mathbb{N}^n$ con $2 \leq |a| \leq N+1$

$$\lambda \cdot a - \lambda_j \neq 0$$

TEOREMA Per ogni $N > 1$

t.c. D è NON-RIS a ordine N, $\exists$ r_N e $G_N \in \mathcal{P}$ $(1 \leq d \leq N)$

con $|G_N|_{2r_N} < \frac{1}{16e}$

in modo che ponendo $\psi(y) := \varphi(1, y)$

(con $\varphi(\tau, y)$ soluzione di $\begin{cases} \varphi_\tau = G_N(\varphi) \\ \varphi(0) = y \end{cases}$)

per $y \in B_{r_N}$ si abbia

$$\psi_*(D + V) = D + W \quad \text{con}$$

$$W \in \mathcal{A}^{\geq N+1}_{r(N)}$$

Dimostrazione dato $G \in P^{1 \leq d \leq N}$

$\forall\ r > 0$ se $|G|_{2r} < \frac{1}{16e}$ allora

(vedi lemmi di struttura) $\varphi(t, y)$ è ben definita per $|\tau| < 8e$ e quindi

$\psi(y)$ è ben definita mappa $B_r \to B_{2r}$

e $\psi_* = e^{[G, \cdot]}$

inoltre se $2r < R$

$$\Pi^{0\le d\le N}\, \psi_*(D+V) - D = \Pi^{1\le d\le N}\, \psi_*(D+V)$$

$$\left(\text{Rem } V \in \mathcal{A}_R^{(\ge 1)}\right)$$

poi (per l'additività del grado)

$$\Pi^{1\le d\le N}\, \psi_*\left(V^{\ge N+1}\right) = 0$$

quindi
$$\Pi^{1\le d\le N}\, \psi_*(D+V) = \Pi^{1\le d\le N}\, e^{[G,\cdot]}\left(D+V^{1\le d\le N}\right)$$

$$= \Pi^{1\le d\le N} \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{ad}\, G)^k}{k!} V + \Pi^{1\le d\le N} \sum_{k\ge N+1} \frac{(\mathrm{ad}\, G)^k V}{k!}$$

$$= \Pi^{1\le d\le N} \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{ad}\, G)^k}{k!} V$$

inoltre $\forall n \ge 2$

la mappa

$$X_1, X_2 \dots X_n \to \Pi^{1\le d\le N}\left[X_1\left[X_2\left[X_3 \dots \left[X_{n-1}, X_n\right]\right]\right]\right]$$

$$\left(P^{1\le d\le N}\right)^n \longrightarrow P^{k\le d\le N}$$

è MULTILINEARE (n-LINEARE) i.e

limitata

$$\left| \Pi^{1\le d\le N} [X_1[X_2[X_3 \cdots [X_{n-1}, X_n]\right|_r \le N^n |X_1|_r |X_2|_r \cdots |X_n|_r$$

quindi è ANALITICA (e a fortiori C^∞)

definisco per $|G|_{2r} < \frac{1}{16e}$

$$\mathcal{F} : P^{1\le d\le N} \times P^{1\le d\le N} \longrightarrow P^{1\le d\le N}$$

$$\mathcal{F}(G, V) = \Pi^{1\le d\le N} \psi_*(D+V)$$

ora $\mathcal{F}$ è C^∞ nelle sue variabili

inoltre $\mathcal{F}(0,0) = 0$ infine

$$d_G \mathcal{F}(0,0)[g] = [g, D]$$

è invertibile (per la condizione di

non-risonanza e ricordando che

se $g = \sum_J \sum_a g_{J,a} \frac{\partial}{\partial x_J}$

$$[g, D] = - \sum_J \sum_a (\lambda \cdot a - \lambda_J)\, g_{J,a} \frac{\partial}{\partial x_J} \Big)$$

quindi vale il TFI ed $\exists\, \varepsilon = \varepsilon_N$

e una funzione $\mathcal{G}$ definita su

$\forall\ |V|_{2r} < \varepsilon_N$ a valori in $P^{1 \le d \le N}$

t.c. $\mathcal{F}(\mathcal{G}(V), V) = 0$

ora $|V^{1 \le d \le N}|_{2r} \le \frac{2r}{R} |V|_R < \varepsilon_N$

è realizzato purché $r < \dfrac{\varepsilon_N R}{2 |V|_R} =: r_N$

$\blacksquare$

Abbiamo quindi trovato $\forall N$ t.c. D sia non-risonante a ordine N una palla B_{r_N} e un cambiamento di coord.

t.c. $\quad \Psi_*(D + V) = D + W \quad$ con $W \in \mathcal{A}_{r_N}^{\ge N+1}$

questo vuol dire che $\forall\, r < r_N$

$$|W|_r \leq \left(\frac{r}{r_N}\right)^{N+1} |W|_{r_N}$$

d'altro canto per definizione $|G|_{2r_N} < \frac{1}{16e}$

quindi

$$|W|_{r_N} < 2\,|D+V|_{2r_N} < 2\left[\left(\max \lambda_i\right) + |V|_{2r_N}\right]$$

Ora supponiamo che D è NON-ris $\forall N \geq 2$

dato $r << \frac{R}{2}$ definisco

$$N(r) = \max\left(N : \; r \leq r_N\right)$$

$\forall\; N \leq N(r)$ ho una mappa ψ_N

t.c. $(\psi_N)_* (D+V) = D + W_N$

con $W_N \in \mathcal{A}_r^{\geq N}$

chiamo $\psi_{Birkhoff}$ la mappa che realizza

$$\min_{1 \le N \le N(r)} |W_N|_r$$

questo è la mappa migliore

cioè mi fornisce le coordinate in

cui il sistema $\dot{x} = D + V$

si scrive nella forma $\dot{y} = D + W$

con $|W|_r$ più piccolo possibile

Inoltre fino a che le traiettorie di

$\dot{y} = Dy + W$ e $\dot{z} = Dz$ restano in B_r

la taglia di W mi dice quanto sono

vicine le traiettorie del sistema vero

alle traiettorie lineari

IL PROBLEMA è che la taglia di W

dipende da come è fatto r_N che

col TFI non abbiamo calcolato esplicitam.

Di solito per calcolare accuratamente ε_N e quindi r_N non si usa il TFI

ma piuttosto l'algoritmo di Newton

che fornisce stime migliori

(LO VEDREMO dopo le FESTE)

Auguri a Tutti