Abbiamo introdotto l'ALGEBRA di LIE GRADUATA dei campi vettoriali polinomiali generati da combinazioni lineari finite di monomi $m_{J,a} = x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$

il "grado" di $m_{J,a}$ è $d = |a|_1 - 1$

(dallo scaling $x \to \lambda x$

$$m_{J,a}(\lambda x) = (\lambda x)^a \frac{\partial}{\partial \lambda x_J} = \lambda^{|a|-1} x^a \frac{\partial}{\partial x_J} \Bigg)$$

Il prodotto di Lie : $V, W \longrightarrow [V, W]$

sui monomi da

$$[m_{J,a}, m_{h,b}] = b_J x^a x^{b-e_J} \frac{\partial}{\partial x_h} - a_h x^b x^{a-e_h} \frac{\partial}{\partial x_J}$$

$$= b_J \, m_{h, a+b-\underline{e}_J} + a_h \, m_{J, a+b-\underline{e}_h}$$

quindi se V è omogeneo di scaling d_V e W di scaling d_W si ha

$[V, W]$ è omogeneo di scaling $d_V + d_W$

Indico $P^{(d)} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} (m_{J,a} : |a|_1 = d+1)$

$$P = \bigoplus P^{(d)} \quad e \quad V = \sum_{d=0}^{D_V} V^{(d)}$$

N.B. Vedremo che P ha una struttura di spazio NORMATO. il suo completamento sono i c.v. ANALITICI

(lo discutiamo mercoledì - vedi il file di esercizi)

Perché voglio lavorare nell'algebra dei c.v. polinomiali o (analitici)?

Consideriamo un c.v. polinomiale $V(0) = 0$

$$V = (Ax)_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{d=1}^{D_V} V^{(d)}$$

(questo è $V^{(0)}$)

Se A è diagonalizzabile possiamo

sempre diagonalizzare la parte lineare

$(\; x = M y \quad \text{con} \quad M^{-1} A M = \text{diag} \;)$

quindi assumiamo che A sia diagonale

$$V = \sum_j \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + V^{(\geq 1)}$$

dove $V^{(\geq 1)}$ vuol dire che NON contiene termini di scaling $= 0$

Vorrei capire cosa succede se applico a V come sopra un diffeomorfismo generato da un c.v. polinomiale

quindi dato $V = D_\lambda + V^{\geq 1}$

$D_\lambda := \sum \lambda_i x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (c.v. diagonale) e dato $G^{\geq 1} = \sum_{d=1}^{D} G^{(d)}$

Se verifico che per $r > 0$ sufficientemente piccolo:

① il flusso $\phi(\tau, y)$ di $\begin{cases} x_\tau = G(x) \\ x(0) = y \end{cases}$ $y \in B_r(0)$

è ben definito $\forall\ |\tau| < T$ con $T > 1$

Pongo: $\psi(y) := \phi(1, y)$

(che per il teorema di Cauchy - Kovaleskaja è in effetti una mappa ANALITICA)

② L'esponenziale di Lie $\sum \frac{(ad\ G)^k}{k!}$

è ben definito (vedremo che la serie è totalmente convergente rispetto alla norma del sup)

Allora

$$\psi_\lambda V = e^{[G^{\geq 1}, \cdot]} V$$

$$D_\lambda + V^{\geq 1} + [G^{\geq 1}, D_\lambda] + [G^{\geq 1}, V^{\geq 1}] + \sum_{k \geq 2} \frac{(\mathrm{ad}\, G)^k}{k!} (D_\lambda + V^{\geq 1}) =$$

$$= D_\lambda \qquad (\text{scaling} = 0)$$

$$+ V^{(1)} + [G^{(1)}, D_\lambda] \qquad (\text{scaling} = 1)$$

$$+ V^{(2)} + [G^{(2)}, D_\lambda] + [G^{(1)}, V^{(1)}] + \frac{1}{2}[G^{(1)}, [G^{(1)}, D_\lambda]] \qquad (\text{scaling } 2)$$

$$+ V^{(3)} + [G^{(3)}, D_\lambda] + [G^{(2)}, V^{(1)}] + [G^{(1)}, V^{(2)}] + \cdots \qquad (\text{scaling } 3)$$

$\vdots$

ora vorrei fissare iterativamente $S^{(d)}$

in modo da cancellare tutti i termini

di scaling positivo (fino al grado massimo di G)

N.B sono equazioni RICORSIVE

cioè a scaling $d=1$ fisso $G^{(1)}$

in modo che $V^{(1)} + [G^{(1)}, D_\lambda] = 0$

(se possibile, altrimenti semplifico + che posso)

ora nel termine di scaling $d=2$ di

$e^{[G,\cdot]} V$

$$V^{(2)} + [G^{(2)}, D_\lambda] + [G^{(1)}, V^{(1)}] + \frac{1}{2}[G^{(1)}, [G^{(1)}, D_\lambda]]$$

$G^{(1)}$ è NOTO e posso fissare $G^{(2)}$

in modo che

$$V^{(2)} + [G^{(2)}, D_\lambda] + [G^{(1)}, V^{(1)}] + \frac{1}{2}[G^{(1)}, [G^{(1)}, D_\lambda]] = 0$$

(se possibile, altrimenti semplifico + che posso)

A OGNI PASSO per porre il termine di grado d di $e^{[G,\cdot]} V = 0$

Ho UNA EQUAZIONE della forma

$$[G^{(d)}, D_\lambda] + V^{(d)} + \underbrace{\text{robe}}_{\text{tutti già NOTI}} = 0$$

Discutiamo quindi la EQUAZIONE OMOLOGICA

$$[D_\lambda, G] = F \qquad \begin{pmatrix} F \text{ termine Noto} \\ G \text{ incognita} \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che

$$[D_\lambda, m_{J,a}] = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - \lambda_J \right) m_{J,a}$$

cioè $P \xrightarrow{ad(D_\lambda)} [D_\lambda, P]$ è un operatore lineare sui c.v. polinomiali

DIAGONALE rispetto alla base $m_{J,a}$

con autovalori $\{(\lambda\cdot a - \lambda_J)\}_{a\in\mathbb{N}^n,\ j=1,\dots,n}$

CONDIZIONI di NON RISONANZA (di Birkhoff)

se per $2\le|a|\le N$ si ha

$$(\lambda\cdot a - \lambda_J)\neq 0 \quad \forall J$$

allora dico che D_λ è Birkhoff NON risonante

fino a ORDINE N

(o che si possono fare N passi di

Birkhoff)

in tal caso $\forall\ F\in\mathcal{P}^{(d)},\quad 2\le d\le N$

$[D_\lambda, G] = F$ ammette una SOLA

soluzione $\quad G \in \mathcal{P}^{(d)}$

$$F = \sum F_{J,a}\, m_{J,a} \iff G = \sum \frac{F_{J,a}}{\lambda\cdot a - \lambda_J}\, m_{J,a}$$

In tal caso riguardando la procedura di prima con $G^{\geq 1} = \sum_{d=1}^{N} G^{(d)}$

$\psi_* V = P_\lambda + W$ dove

W NON è un polinomio ma è sicuramente C^∞ (vedremo che è un C.V. ANALITICO) e inoltre ha scaling minimo $N+1$

quindi in un appropriato insieme di coordinate definite su una palla $B_{r_0}(0)$ con r_0 suff. piccolo

$\dot{x} = V \iff \dot{y} = D_\lambda + W$

cioè $\dot{y}_j = \lambda_j y_j + W_j(y) \qquad j = 1, \dots, n$

Dato che W_j ha uno zero di ordine $N+2$

so che per $r \ll r_0$ $\sup_{y \in B_r} |W_r| \leq r^{N+1} C_N$

è MOLTO PICCOLO!

Vogliamo paragonare la dinamica

di $\dot{z}_j = \lambda_j z_j$ (FORMA NORMALE)

con quella di $\Psi_* V$

Abbiamo visto (Es. in AM430-4 sul lemma di GRONWALL) che se $z(t)$ e $y(t)$ restano in

$B_r(0)$ per un tempo T allora

$$\forall \ |t| < T \qquad |z(t) - y(t)| \leq r^{N+1} C_N T e^{LT}$$

con $L = 2 \max\limits_{j=1,\dots,m} |\lambda_j|$