Teorema di Forma Normale ordine N

$$D + V^{\geq 1} \qquad\qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Ipotesi:

① $V^{\geq 1} \in \mathcal{A}^{\geq 1}_{R_0}$

② D è NON-RISONANTE ad ordine N

cioè $\sum \lambda_i a_i - \lambda_j \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}^n ; \forall j = 1, \dots, n$

con $1 < |a| \leq N + 1$

Tesi: esiste $r_N > 0$ e $G_N \in \mathcal{P}^{1 \leq d \leq N}$

con $|G_N|_{2r_N} < \frac{1}{16e}$

t.c. posto $\psi(y) = \varphi(1, y)$ $\qquad \begin{cases} \varphi' = G_N(\varphi) \\ \varphi(0) = y \end{cases}$

si ha $\psi_*(D+V) = e^{[G_N, \cdot]}(D+V) = D + W_N$

con $W_N \in \mathcal{A}^{\geq N+1}_{r_N}$

Dim: applico il TFI a

$$\mathcal{F}(G,V) := \prod^{1\leq d\leq N} \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{ad}\, G)^k}{k!} (D+V)$$

Cosa faccio se NON è vero che

D è NON-RISONANTE e ordine N ?

Idea: $\mathcal{P}^{1\leq d\leq N}$ è uno spazio vettoriale

(di dimensione finita)

su tale spazio agisce l'operatore diagonale

$$\mathrm{ad}\, D : V \longrightarrow [D,V] = \sum_{J,a} (\lambda\cdot a - \lambda_J) V_{J,a}\, x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$

ora

$$\mathcal{P}^{1\leq d\leq N} = K^{1\leq d\leq N} \oplus R^{1\leq d\leq N}$$

dove per definizione

$$K^{1\leq d\leq N} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(x^a \frac{\partial}{\partial x_J} \quad \text{t.c.} \quad \lambda\cdot a - \lambda_J = 0,\ 2\leq |a| \leq N+1 \right)$$

$$\mathcal{R}^{1\le d\le N} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(x^a \frac{\partial}{\partial x_J} \quad \text{t.c.} \quad \lambda\cdot a - \lambda_J \neq 0, \; 2 \le |a| \le N+1 \right)$$

in questa definizione ad D è invertibile

come operatore da $\mathcal{R}^{1\le d\le N} \longrightarrow \mathcal{R}^{1\le d\le N}$

Dato $W \in \mathcal{P}^{1\le d\le N}$ $\quad W = \sum W_{J,a}\, x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$

definisco $$\Pi_{\mathcal{R}} W := \sum_{J,a:\ \lambda\cdot a - \lambda_J \neq 0} W_{J,a}\, x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$

Quindi posso applicare il TFI a

$$\tilde{\mathcal{F}}(G,V) := \Pi_{\mathcal{R}} \, \Pi^{1\le d\le N} \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{ad}\, G)^k}{k!} (D+V)$$

facendo l'ANSATZ $\quad G \in \mathcal{R}^{1\le d\le N}$

$$\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{R}^{1\le d\le N} \times \mathcal{P}^{1\le d\le N} \longrightarrow \mathcal{R}^{1\le d\le N}$$

inoltre $\tilde{\mathcal{F}}(0,0) = 0$ $\quad$ e $\quad \forall g \in \mathcal{R}^{1\le d\le N}$

$d_G \tilde{\mathcal{F}}(q,0)[g] = [D, g]$ è invertibile

e $\mathcal{R}^{1\leq d\leq N}$ in se stesso.

Quindi per il TFI $\exists\, r_N > 0,\ G_N \in \mathcal{R}^{1\leq d\leq N}$

t.c. $|G_N|_{2r_N} < \frac{1}{16e}$ e posto

$\psi(y) = \varphi(1, y) \qquad \psi : B_{r_N} \longrightarrow B_{2r_N}$

è $\psi_*(D+V) = D + Z + W$

con $W \in \mathcal{A}_{r_N}^{\geq N+1}$ e $Z \in \mathcal{K}^{1\leq d\leq N}$

Ricordando che $|W|_r < \left(\frac{r}{r_N}\right)^{N+1} |W|_{r_N}$

possiamo prendere $r \ll r_N$ e confrontare

le dinamiche

$\dot{y} = D + Z + W \quad ; \quad \dot{z} = D + Z$

fino a che restano dentro alla palla B_r

$$\sup_{|t|<T} |y(t) - z(t)| \leq MT e^{LT}$$

dove $M = \max_{B_r} |W| \leq \frac{r^{N+2}}{r_N^{N+1}} |W|_{r_N}$

e L è la costante di lipschitz di

$D+Z$ $\qquad (D+Z)_J = \lambda_J y_J + \sum_{|a|\geq 2} Z_{J,a} y^a$

quindi $L \leq 2 \max(|\lambda_J|)$

quindi fino a che le orbite restano in una palla B_r $y(t)$ è vicina a $z(t)$

$z' = D + Z$ si chiama FORMA NORMALE

Noi fino ad ora abbiamo sempre considerato D diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Un caso particolarmente interessante è quando λ_J sono immaginari puri (e quindi n è pari e i λ_J sono a coppie di autovalori uguali ed opposti)

Per discutere tale caso: 3 possibili strategie

① Passare ai complessi (sia i polinomi che le funzioni analitiche si vedono anche meglio su $\mathbb{C}$!)

② Scrivere D in blocchi 2×2 (se si può)

$$D = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & \omega_2 \\ -\omega_2 & 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

e usare tutto il ragionamento fatto fino ad ora rispetto a questi blocchi (questa è la strategia classica)

③ Dopo aver scritto D a blocchi $n = 2k$

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 y_1 + V_{1,x} \\ y_1 = -\omega_1 x_1 + V_{1,y} \\ x_2 = \omega_2 y_2 + V_{2,x} \\ y_2 = -\omega_2 x_2 + V_{2,y} \\ \vdots \\ x_k = \omega_k y_k + V_{k,x} \\ y_k = -\omega_k x_k + V_{k,y} \end{cases}$$

passo a coordinate polari per ciascuna coppia x_i, y_i

(Le cose tipiche sono le coordinate polari simplettiche - O AZIONE ANGOLO)

$$x_n = \sqrt{I_n}\cos(\theta_n) \qquad y_n = \sqrt{I_k}\sin(\theta_n)$$

$\rightsquigarrow$ <u>TEORIA KAM</u>

Ritorniamo al caso diagonalizzabile sui reali.

Supponiamo che tutte le λ_j siano positive

allora se $|a| \geq \dfrac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)} + 1$

$$\lambda \cdot a - \lambda_j \geq \min(\lambda_i)|a| - \max(\lambda_i)$$
$$\geq \min(\lambda_i)$$

ponendo $N_0 = \dfrac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)} + 1$

LEMMA: se D è non risonante a ordine N_0

allora $\inf\limits_{\substack{j,\, a \\ |a| \geq 2}} |\lambda \cdot a - \lambda_j| =: \gamma > 0$

(in effetti è un minimo!)

Dimostrazione:

$$\inf_{\substack{J, a \\ |a| \geq 2}} | \lambda \cdot a - \lambda_J | =$$

$$\min \Big(\min_{\substack{J, a \\ 2 \leq |a| \leq N_0}} | \lambda \cdot a - \lambda_J |, \inf_{\substack{J, a \\ |a| > N_0}} | \lambda \cdot a - \lambda_J | \Big)$$

$$\geq \min \Big(\min_{\substack{J, a \\ 2 \leq |a| \leq N_0}} | \lambda \cdot a - \lambda_J |, \min |\lambda_i| \Big)$$

ora per ipotesi questa è una lista finita di numeri positivi, quindi il minimo è positivo! ∎

Teorema (Linearizzabilità)

Sia $X = D + V$ con $V \in \mathcal{A}_{R_0}^{\geq 1}$

e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ con

$$\inf_{J,a} (\lambda \cdot a - \lambda_J) = \gamma > 0$$

(per esempio perché $\lambda_i > 0$ ed è non resonante ad ordine N_0)

Allora: $\exists\ r_{fin} > 0$ e $G \in \mathcal{A}_{r_{fin}}^{\geq 1}$

con $|G|_{2r_{fin}} < \frac{1}{16e}$ t.c. ponendo

$\psi(y) = \varphi(1, y)$ $\quad \begin{cases} \varphi' = G(\varphi) \\ \varphi(0) = y \end{cases}$

si ha

$$\psi_* (D + V) = D$$

Osservazione: Non riesco a farlo col TFI perché $e^{[G,\cdot]}(D+V) =: \mathcal{F}(G,V)$

$$\mathcal{F}: \mathcal{A}_r^{\geq 1} \times \mathcal{A}_r^{\geq 1} \longrightarrow \mathcal{A}_{r-\rho}$$

e quindi NON riesco a verificare le ipotesi

(provate!)

Faccio una dimostrazione basata su un ALGORITMO QUADRATICO (schema di Newton o Nash-Moser) che funzione in casi molto generali.

Si basa sull'applicazione ripetuta del seguente

PASSO ITERATIVO (KAM Step)

Data $Y = D + W$ con $W \in \mathcal{A}_r^{\geq d}$

e dato $r_+ < r$ t.c.

$$\frac{|W|_r}{\gamma} < \frac{r - r_+}{r} \frac{1}{8e}$$

se G l' UNICA soluzione di

$[D, G] = W$ (N.B. $G \in \mathcal{A}_r^{\geq d}$)

Per costruzione

$$G = \sum \frac{W_{J,a}}{\lambda \cdot a - \lambda_J} x^a \frac{\partial}{\partial x_J}$$

e per definizione $|\lambda \cdot a - \lambda_J| \geq \gamma$

quindi $$|G|_r \leq \frac{|W|_r}{\gamma} < \frac{r - r_+}{r} \frac{1}{8e}$$

quindi G genera un flusso $\varphi(\tau, y)$

$\forall\, y \in B_{r_1}$ $|\tau| < 8e$ pongo $\psi := \varphi(1, \cdot)$

e $Y_+ = e^{[G, \cdot]} Y \in \mathcal{A}_{r_+}$

per costruzione

$$Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad\,G)^k}{k!}(D+W)$$

$$= D + \overbrace{W + [G,D]}^{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad\,G)^k}{k!} W$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad\,G)^k}{k!} D =$$

(per la definizione di G; $[G,D] = -W$!)

$$= D + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad\,G)^k}{k!} W + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad\,G)^{k-1}}{k!} [G,D]$$

$$= D + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad\,G)^k}{k!} W - \sum_{h=2}^{\infty} \frac{(ad\,G)^{h-1}}{h!} W$$

(pongo $h = k+1$)

$$= D + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)(ad\,G)^k W$$

quindi $\quad Y_+ = D + W_+$

con $\quad W_+ := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) (\mathrm{ad}\, G)^k W$

Dato che $\quad W \in \mathcal{A}_r^{\geq d} \quad$ e $\quad G \in \mathcal{A}_r^{\geq d}$

$\left(\text{e} \quad |G|_r < \frac{r - r_+}{r} \, \frac{1}{8e} \right)$

So che $\quad W_+ \in \mathcal{A}_{r_+}^{\geq d_+} \quad$ con $\quad d_+ = 2d$

inoltre $\quad$ (per il lemma di struttura)

$$|W_+|_{r_+} \leq 2 |W|_r \left(\frac{|G|_r \cdot 4er}{(r - r_+)} \right)$$

$$\leq \frac{|W|_r^2}{\gamma} \, \frac{8er}{r - r_+}$$

si chiama algoritmo quadratico perché

è una macchina che dato W

sufficientemente piccolo e $r_+ > 0$ produce

W_+ che è di grado $\geq 2d$ ed è

quadratico in $|W|$

(quindi SPERO molto più piccolo)

Ora fisso un $r_0 > 0$

(che determinerò a posteriori) $V = W_0$

Parto da $X_0 = D + W_0$ di grado $\geq d_0 = 1$

se $r_0 \ll 1$ $|W_0|_{r_0}$ è piccolo !

fisso $r_1 < r_0$ IN MODO CHE siano soddisfatte

le ipotesi dello STEP.

applico $e^{[G_0, \cdot]}$

$[D, G_0] = W_0$

$$e^{[G_0,\cdot]}\, X_0 = X_1 = D + W_1 \; ; \quad W_1 \in \mathcal{A}_{r_1}^{\geq d_1} \qquad d_1 = 2d_0 = 2$$

fino $r_2 < r_1$ se sono soddisfatte le Hp dello STEP

(con $W = W_1$)

$\Big\downarrow$ applico $e^{[G_1,\cdot]}$

$[D, G_1] = W_1$

$$\psi_{1*}\psi_{0*} X = e^{[G_1,\cdot]}\, X_1 = X_2 = D + W_2 \; ; \quad W_2 \in \mathcal{A}_{r_2}^{\geq d_2}$$

$$\| $$

$$(\psi_0 \circ \psi_1)_* X \qquad \text{con } d_2 = 2d_1 = 4$$

$\Big\downarrow$ se posso ripetere k volte

$$(\psi_0 \circ \psi_1 \circ \cdots \psi_k)_* X = e^{[G_k,\cdot]}\, X_{k-1} = D + W_k$$

con $W_k \in \mathcal{A}_{r_k}^{\geq d_k}$ e $d_k = 2^k$

Voglio mostrare che questa procedura converge

STRATEGIA (*)

Devo mostrare 2 cose:

① * posso trovare una sequenza $r_k \searrow \frac{r_0}{2}$ in modo che

W_k è definito $\forall k$ e

$W_k \to 0$

② * la corrispondente sequenza di cambiamenti di coordinate

$$\Phi_k = \Psi_0 \circ \Psi_1 \circ \cdots \circ \Psi_k$$

è convergente (almeno nello spazio di Banach delle mappe C^1)

Dimostrazione (per induzione)

fisso $\quad r_k = r_{k-1} - \rho_k \quad$ con $\quad \rho_k = 2^{-k-1} r_0$

$$r_k = r_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} \right) \qquad \left(r_k \searrow \frac{r_0}{2} \right)$$

fisso $\quad \varepsilon_k = \varepsilon_0 \, e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k + 1}$

(ε_0 e r_0 li determino a posteriori)

pongo $\quad d_k = 2^k$

LEMMA ITERATIVO:

Se $\quad \dfrac{|W_0|_{r_0}}{\gamma} := \varepsilon_0 < \dfrac{1}{64 e^2} \quad$ (si capisce dopo perché)

allora:

$\forall\, k \geq 0$ valle

$$(S1)_k \qquad \frac{|W_k|_{r_k}}{\gamma} < \frac{r_k - r_{k+1}}{r_k} \; \frac{1}{8e}$$

quindi posso applicare

il KAM step

inoltre $\forall k \geq 0$ vale

$$(S2)_k \qquad \frac{|W_k|_{r_k}}{\gamma} \leq \varepsilon_k$$

DIMOSTRAZIONE: Per induzione:

PASSO 0: se $k = 0$

per applicare lo STEP mi serve

$$(S1)_0 \qquad \frac{|W_0|_{r_0}}{\gamma} \leq \frac{r_0 - r_1}{r_0} \frac{1}{8e}$$

ma per costruzione $r_0 - r_1 = \rho_1 = \frac{r_0}{4}$

quindi serve

$$\frac{|W_0|_{r_0}}{\gamma} \leq \frac{1}{32e}$$

(vero per le condizioni di PICCOLEZZA!)

inoltre

$$(S2)_0 \qquad \frac{|W_0|_{r_0}}{\gamma} = \varepsilon_0 \leq \varepsilon_0 \quad \text{OVVIO}$$

quindi supponiamo di aver applicato

k volte lo step.

cioè abbiamo $W_k \in \mathcal{A}_{r_k}^{\geq d_k}$

che soddisfa $\frac{|W_k|_{r_k}}{\gamma} \leq \varepsilon_k$

allora

$$(S1)_k \qquad \frac{|W_k|_{r_k}}{\gamma} \leq \varepsilon_k \leq \frac{r_k - r_{k+1}}{r_k} \frac{1}{8e}$$

equivale a verificare

$$8e\,\frac{\varepsilon_k\, r_k}{r_k - r_{k+1}} \le 8e\,\frac{e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k+1}}{2^{-k-2}} \le 8\cdot 4\cdot e^2\, e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k} 2^k \le 1$$

ma questo segue dalla piccolezza infatti

$$\varepsilon_0 \cdot 32e^2 \sup_{k\ge 0} 2^k e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k} \le \varepsilon_0\, 32\cdot e^2\cdot 0{,}5$$

$$< 1 \quad \text{(piccolezza)}$$

infine per il KAM step.

$$\frac{|W_{k+1}|_{r_{k+1}}}{\gamma} \le \frac{1}{\gamma}\,\frac{|W_k|^2_{r_k}}{\gamma}\,\frac{8e\, r_k}{r_k - r_{k+1}}$$

$$\le \varepsilon_k^2\,\frac{8e\, r_k}{r_k - r_{k+1}} \le \varepsilon_{k+1}$$

infatti

$$\varepsilon_{k+1}^{-1}\;\varepsilon_k^{2}\;\frac{8e,\, r_k}{r_k - r_{k+1}} \le$$

$$\varepsilon_0\, e^{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}}\, e^{-2\left(\frac{3}{2}\right)^{k}+1} \cdot 8e \cdot 2^{k+2} \le$$

$$32\, e^2\, \varepsilon_0 \sup_{k \ge 0} e^{-\left(2-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{k}}\, 2^{k} =$$

$$\|$$

$$32\, e^2\, \varepsilon_0 \underbrace{\sup_{k \ge 0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k}}\, 2^{k}} \le 32 \cdot e^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \underbrace{1{,}5}$$

$$\le 64\, e^2\, \varepsilon_0 < 1$$

(piccolezza)

Ora $\forall k \geq 0$

$$|W_k|_{\frac{r_0}{2}} \leq |W_k|_{r_k} \leq \gamma \varepsilon_0 e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k}$$

$\geq 2^k$

quindi $W_k \in \mathcal{A}_{\frac{r_0}{2}}$ e

$W_k \longrightarrow 0$ in tale spazio

(Ho dimostrato la prima parte della mia strategia)

Verifichiamo la 2ª parte

definisco

$$\Phi_k = \Psi_0 \circ \Psi_1 \circ \Psi_2 \cdots \circ \Psi_k$$

Note Bene

$$B_{r_{k+1}} \xrightarrow{\psi_k} \cdots B_{r_3} \xrightarrow{\psi_2} B_{r_2} \xrightarrow{\psi_1} B_{r_1} \xrightarrow{\psi_0} B_{r_0}$$

Faccio vedere che è una successione di Cauchy in uno spazio di Banach di funzioni ALMENO $C^1(B_{\frac{r_0}{2}}, \mathbb{R}^n)$

di solito si fa nello spazio di Banach delle funzioni reali ANALITICHE con la norma del sup
[vedi OSSERVAZ. su AMG30_18]

$$f : B_{\frac{r_0}{2}} \to \mathbb{R}^n \qquad |f|_\infty = \sup_{y \in B_{\frac{r_0}{2}}} \sup_{j=1,\dots,m} |f_j(y)|$$

Noto che

$$\Phi_k : B_{r_{k+1}} \longrightarrow B_{r_0}$$

(quindi è definita su $B_{\frac{r_0}{2}} \subset B_{r_{k+1}}$)

inoltre (REM $\phi_k = \phi_{k-1} \circ \psi_k$)

$$|\phi_k - \phi_{k-1}|_\infty = |\phi_{k-1} - \phi_{k-1} \circ \psi_k|$$

$$= \sup_{y \in B_{\frac{r_0}{2}}} |\phi_{k-1}(\psi_k(y)) - \phi_{k-1}(y)|$$

$$\leq \sup_{y \in B_{\frac{r_0}{2}}} |\partial_x \phi_{k-1}(y^*)(\psi_k(y) - y)|$$

Ricordiamo che (x i lemmi di struttura)

$$\sup_{y \in B_{r_{k+1}}} |\psi_k(y) - y| \leq r_k |G_k|_{r_k} \leq r_0 \varepsilon_0 e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k}$$

per costruzione $\sup_{x \in B_{r_k}} |\phi_{k-1}(x)| \leq r_0$

inoltre ϕ è analitica quindi

$$\phi_{k-1,J} = \sum \phi_{k-1,J,a} \, x^a$$

è totalmente convergente in B_{r_k} APERTA

allora (caratterizzazione delle funzioni C^ω VEDI Chierchia sulle serie di potenze)

$$|\phi_{k-1,J,a}| \leq r_k^{-|a|} \sup_{B_{r_k}} |\phi_{k-1}|$$

da cui (stima di Cauchy)

$$\sup_{B_{\frac{r_0}{2}}} |\partial_x \phi_{k-1}(x)| \leq \sum \left(\frac{r_0}{2r_k}\right)^{|a|} |a| \sup_{B_{r_k}} |\phi_{k-1}|$$

$$\frac{1}{r_k - \frac{r_0}{2}} \sup_{B_{r_k}} |\phi_{k-1}|$$

$$\leq 2^{k+1}$$

Quindi (metto assieme i $+$)

$$|\phi_k - \phi_{k-1}|_\infty \leq 2^{k+1} r_0 \varepsilon_0 e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k} < 2^{-k} r_0$$

(per condizioni di piccolezza su ε_0

notando che

$$2 \cdot \varepsilon_0 \sup_k 4^k e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^k} < 1$$
)

Allora $|\phi_m - \phi_n| \leq r_0 \sum_{k=n}^{m} 2^{-k}$

e ϕ è di Cauchy e quindi convergente $\boxtimes$

Se NON vi piace lavorare NELLO spazio delle funzioni analitiche

Faccio vedere che è una successione di Cauchy Nello spazio di Banach delle funzioni $C^1(B_{\frac{r_0}{2}}, \mathbb{R}^n)$

con la norma

$$|f|_{C^1} := \sup_{B_{\frac{r_0}{2}}} |f| + \frac{r_0}{2} \sup_{B_{\frac{r_0}{2}}} |Jf|$$

$$\phi_k : B_{r_{k+1}} \longrightarrow B_{r_0}$$

(quindi è definita su $B_{\frac{r_0}{2}} \subset B_{r_{k+1}}$)

inoltre (REM $\phi_k = \phi_{k-1} \circ \psi_k$)

$$|\phi_k - \phi_{k-1}|_{C^1} = |\phi_{k-1} - \phi_{k-1} \circ \psi_k|_{C_1}$$

$$= \sup_{y \in B_{\frac{r_0}{2}}} |\phi_{k-1}(\psi_k(y)) - \phi_{k-1}(y)|$$

$$+ \quad \frac{r_0}{2} \sup_{y \in B_{\frac{r_0}{2}}} \left| \left(\partial_x \phi_{k-1}(\psi_k(y)) - \mathbb{1} \right) \partial_y \psi_k(y) \right|$$

$$\leq \sup_{y \in B_{\frac{r_0}{2}}} \left| \partial_x \phi_{k-1}(y^\circ) \left(\psi_k(y) - y \right) \right|$$

$$+ \quad \frac{r_0}{2} \sup_{y \in B_{\frac{r_0}{2}}} \left| \left(\partial_x \phi_{k-1}(\psi_k(y)) - \mathbb{1} \right) \partial_y \psi_k(y) \right|$$

ora devo procedere per induzione!