Esercitazione.

1. Data la funzione
$$f(x,t) := \frac{1-x^2}{1-t^2}$$
considerare il problema di Cauchy
$$(a) \qquad \begin{cases} \dot u(t) = f(u(t),t) \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$$

1. Determinare il dominio di definizione di f. Determinare

$\mathcal{D}_f := \{$dati iniziali $(u_0, t_0) :\ \exists\, r, T_0 > 0$ vale il teorema di esistenza e unicità locale$\}$

2. Posto $t_0 = u_0 = 0$ verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale con
$$D := \{|u| \le 2\}\,, \quad I_0 := \{|t| \le 1/2\}\,,$$
stimare il tempo T.

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy (a) con istante iniziale $t_0 = 0$ e posizione iniziale rispettivamente $u_0 = 0$ e $u_0 = 1$.

2. Sia $u(t)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$(b) \qquad \begin{cases} \dot u(t) = u(t) + (u(t))^4 \\ u(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$
Quale problema di Cauchy risolve $v(t) = e^t u(t)$ (con istante iniziale sempre $t_0 = 0$)?
Risolvere il problema di Cauchy per l'incognita $v(t)$ ed utilizzarlo per determinare la soluzione $u(t)$ del problema di Cauchy di partenza.

3. Data una matrice reale $A \in \mathrm{mat}(n \times n)$ considerare il problema di Cauchy
$$(c) \qquad \begin{cases} \dot u = Au \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
con $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Fissato
$$D := \{|u - u_0| \le |u_0|\}\,, \quad I_0 := \{|t - t_0| \le 1\}\,,$$
stimare M, L e determinare $T > 0$ che soddisfi le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Dedurre che per ogni (u_0, t_0) la soluzione del corrispondente problema di Cauchy è globale (definita per ogni t)

4. Si consideri l'equazione differenziale (scritta per l'incognita $x(t)$)

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + x^3 = 0 \\ x(0) = 1\,, \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Posto

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

scrivere il problema di Cauchy che soddisfa $u(t)$ (con istante iniziale $t_0 = 0$).

5. Si consideri l'equazione differenziale (scritta per l'incognita $x(t)$)

$$(d) \qquad \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

si determino i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $x(t) = e^{\lambda t}$ sia soluzione di (d). Dette λ_1, λ_2 le soluzioni del punto precedente, verificare che qualsiasi combinazione lineare a coefficienti reali di $e^{\lambda_1 t}$ ed $e^{\lambda_2 t}$

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

è ancora soluzione di (d). Dedurre che lo spazio delle soluzioni di (d) è uno spazio vettoriale di dimensione due.