Esercitazione.

1.Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{u}{\log(u)} t \\ u(0) = e \end{cases}$$

Dopo aver verificato l'esistenza ed unicità di una soluzione locale del problema di Cauchy, determinare la soluzione $u(t)$ ed il suo intervallo massimale di esistenza.

2.Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = u^{2/3} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Dopo aver verificato l'esistenza ed unicità di una soluzione locale del problema di Cauchy, determinare la soluzione $u(t)$ ed il suo intervallo massimale di esistenza. Cosa succede se scelgo come dato iniziale $u(0) = 0$?

3. Si consideri l' equazione differenziale

$$x^{(3)} + 9\dot{x} = \sin(3t)$$

(a) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione.
(b) Trovare tutte le eventuali soluzioni che soddisfano $x(-\pi) = x(\pi)$.

4. Trovare tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{array}{ccc} \ddot{x} + 3x = 0\,, & \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0\,, & \ddot{x} + \dot{x} + x = 0\,, \\ x^{(3)} - 4\ddot{x} + 4\dot{x} = 0\,, & x^{(3)} - 4\ddot{x} + 5\dot{x} - 2x = 0\,, & x^{(3)} - 4x = 0\,, \\ x^{(4)} - 4\ddot{x} = 0\,, & x^{(4)} = 0\,, & x^{(4)} + ex^{(3)} - 4\ddot{x} = 0\,, \end{array}$$

5. Trovare una soluzione particolare delle equazioni:

$$\begin{array}{cc} \ddot{x} + x = t + 1\,, & \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = e^{2t}\,, \\ x^{(3)} - 4\ddot{x} + 4\dot{x} = e^{t}\,, & x^{(3)} - 4\ddot{x} + 5\dot{x} - 2x = te^{t}\,, \\ x^{(4)} - 4\ddot{x} = \sin t + e^{t}\,, & x^{(2)} - x = \cos t\,, \end{array}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \frac{\log(t)}{e^{t}}$$

6. Studiare i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 \\ x(0) = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{x} = \frac{4x}{t} + 2t\sqrt{x} \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

Provate a fare un cambio di variabile.