Esercizio 1.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{(1-u^2(t))}{1-t^2} := f(u(t),t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (A)$$

0) Determinare il dominio di definizione di $f(x,t)$.

1) posto $u_0 = 0$ verificare le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale in

$$D := \{ |u| \leq 2 \} \qquad I_0 : \{ |t| \leq \tfrac{1}{2} \}$$

Determinare T che soddisfi le ipotesi del teorema di esist. unica locale

$$(TM \leq r, \quad TL < 1)$$

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy (A) con $u_0 = 0$ e $u_0 = 1$

Esercizio 2.

Sia $u(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u + u^4 \\ u(0) = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad (B)$$

Scrivere il problema di Cauchy di cui è soluzione $v(t) = e^{-t} u(t)$

Risolvere tale problema di Cauchy e utilizzando tale risultato calcolare $u(t)$.

Esercizio 3.

Sia $A \in Mat(n \times n)$ (indipendente da x e da t)

si consideri il prob. di Cauchy.

$$\begin{cases} u' = Au \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad (C) \qquad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

$u_0 \in \mathbb{R}^n$

Fissato $D := \{ |u - u_0| \leq |u_0| \}$

$I_0 = \{ |t - t_0| \leq 1 \}$

Stimare M, L e quindi determinare

$T > 0$ che soddisfi le Hp. del Teo.

di esistenza locale.

Dedurre che per ogni scelta di t_0, u_0

la soluzione del prob. di Cauchy

è globale (esiste $\forall t$).

<u>Esercizio 4.</u> Si consideri l'equazione

differenziale (scritta per l'incognita $x(t) : I \to \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x^3 = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

posto $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

Scrivere il problema di Cauchy che soddisfa u.

Esercizio 5.

Si consideri l'equazione diff.

$(\bullet)$ $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$ determinare i $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $x(t) = e^{\lambda t}$ è soluzione di $(\bullet)$

Detti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni del punto precedente verificare che qualsiasi combinazione lineare a coefficienti reali di $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$ [a e b NUMERI]

è ancora soluzione di $(\bullet)$