Esercizio 3.2 Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 se $x_1 \neq 1/2$ e, per $x_1 = 1/2$ la funzione $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ vale 1 se x_2 è irrazionale e 0 se x_2 è razionale. Si dimostri che f è integrabile su $[0,1]^2$ (mentre, come sappiamo, $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ non è integrabile su $[0,1]$).

Esercizio 3.5 * **(Curva di Peano)** *Esiste una funzione continua* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $\varphi([0,1]) = Q := [0,1] \times [0,1]$ ossia esiste una "curva" che ricopre un quadrato.
Se $I := [0,1] \times \{0\}$ denota il segmento unitario immerso in $\mathbb{R}^2$ e se, per ogni $(x,y) \in I$, definiamo $f(x,y) = \varphi(x)$, vediamo che $f \in C(I, \mathbb{R}^2)$, $\mathrm{mis}_2(I) = 0$ ma $\mathrm{mis}_2(f(I)) = \mathrm{mis}_2([0,1]^2) = 1$.

Si completino i dettagli del seguente schema di dimostrazione:
1) Sia K un quadrato di lato di lunghezza ℓ e lo si suddivida in quattro quadrati di lato $\ell/2$. Si fissi un lato L di K e su di esso si fissi un punto M a distanza $\ell/4$ da uno dei vertici di L e si fissi un altro lato L' di K diverso da L. Si faccia vedere che esiste una ed una sola poligonale[22] di lunghezza 2ℓ, che passi per i centri dei quattro quadrati in cui è stato suddiviso K e con estremi M ed N dove N è un punto su L' a distanza $\ell/4$ da uno dei suoi due estremi.
2) Sia $a < b$. Si "parametrizzi" su $[a,b]$ una qualunque poligonale in $\mathbb{R}^n$ ossia, se gli estremi della poligonale hanno coordinate x e y, si trovi una funzione $\gamma : t \in [a,b] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e tale che l'insieme $\{\gamma(t) : a \le t \le b\}$ coincida con la poligonale data. [Suggerimento: un segmento di estremi x e z è parametrizzato su $[a,b]$ da $\gamma(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(y - x)$.]
3) La funzione (o "curva") φ sarà ottenuta come limite (uniforme) di funzioni continue $\varphi_k : [0,1] \to Q$. Ogni φ_k sarà una parametrizzazione di una poligonale chiusa che passa per ogni centro dei 2^{2k} quadrati di lato $2^{-\kappa}$ in cui si divide Q. Denoteremo con Γ_k la poligonale parametrizzata da φ_k, cioè $\Gamma_k := \{\varphi_k(t) : 0 \le t \le 1\}$. *Primo passo*: si divida Q in quattro quadrati di lato 1/2 e sia Γ_1 la poligonale formata dai quattro segmenti che uniscono i centri dei quattro quadrati. *Secondo passo*: Si consideri il quadrato Q_1^1 di lato 1/2 di centro $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ e sia $\Gamma_1^1 := \Gamma_1 \cap Q_1^1$. Si divida Q_1^1 in quattro quadrati di lato 1/4 (che chiameremo $Q_2^1,...,Q_2^4$) ed usando il punto 1) si costruisca una poligonale Γ_2^1 che passi per i quattro centri di Q_2^j con estremi a distanza 1/8 dai due punti in $\Gamma_1^1 \cap Q_1^1$: vi sono infatti due poligonali con tali proprietà e per eliminare tale ambiguità si scelga quella con uno degli estremi in $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$. Si divida Q in 16 quadrati di lato 1/4, Q_2^j, $j = 1, ..., 16$. Iterando il procedimento sopra descritto si costruisca la poligonale chiusa Γ_2 che passi per tutti i 16 centri dei Q_2^j (e per il punto $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$: $\Gamma_2^1 = \Gamma_2 \cap Q_1^1$ *etc.*). *Terzo passo:* si generalizzi il procedimento descritto sopra e per ogni k si costruisca una poligonale chiusa, Γ_k, che passi per i 2^{2k} centri dei quadrati di lato 2^{-k} in cui è possibile suddividere Q. Tale costruzione è unica se si impone che la poligonale passi anche per il punto $(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}})$.
4) Si parametrizzi Γ_k tramite $\varphi_k(t)$ in modo tale che $\varphi_k(\frac{j}{2^{k+1}})$ coincida, per ogni $j = 1, ..., 2^{2k}$, con il centro di Q_k^j (si noti che Γ_k dà un ordine ai quadrati di lato 2^{-k} per i cui centri passa).
5) Si dimostri che per ogni $0 \le t \le 1$ vale $|\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)| \le \frac{1}{2^{k-1}}$ e da questo si deduca che $\varphi_k(t)$ converge uniformemente: il limite $\varphi(t)$ sarà dunque una funzione continua da $[0,1]$ in Q (e $\varphi(0) = (\frac{1}{2}, 1)$).
6) Si dimostri che φ è surgettiva su Q cioè $\varphi([0,1]) = Q$.
7) φ è anche iniettiva? [Risposta: no]

Esercizio 3.6 (Integrali impropri I) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme *non limitato*. Supponiamo che per ogni $r > 0$, l'insieme $A_r := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le r\}$ sia misurabile. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile su A_r per ogni $r > 0$.

Definizione 3.8 *Se esiste finito il limite*

$$\lim_{r \to \infty} \int_{A_r} |f| < \infty \tag{3.65}$$

si dice che f *è integrabile su* A *e si pone*

$$\int_A f = \lim_{r \to \infty} \int_{A_r} f \ . \tag{3.66}$$

(i) Si controlli che tale definizione è ben posta.
(ii) Dire se $f = e^{-|x|}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$ (nel senso della definizione appena data) e, in caso affermativo, si stimi $\int_{\mathbb{R}^n} f$.
[Suggerimento: si noti che $\exp(-|x|) \le \exp(-\frac{1}{\sqrt{n}}|x|_1)$.]
(iii) Sia $n = 2$ e $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \le 1\}$. Si dica se è integrabile su A la funzione $f = x_1^{100}(\cos x_2)(1 + |x_2|)^{-\frac{3}{2}}$ e, in caso affermativo, si stimi $\int_A f$.

Notazioni: la misura esterna di un insieme e' l'integrale superiore della funzione caratteristica (cioè l' inf delle somme superiori) il pedice m in mis est_m si riferisce alla dimensione dello spazio ambiente su cui si integra (quindi la dimensione dei rettangoli che servono per definire le funzioni semplici)

2.14 *Sia* $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una funzione uniformemente Lipschitziana con costante di Lipschitz* $L > 0$ *rispetto alla norma del sup*[12], *allora*
(i) *per ogni* $B \subseteq E$ *misurabile* $\operatorname{mis}\operatorname{est}_m F(B) \leq L^m \operatorname{mis}_n B$.
(ii) *se* Q *ha misura nulla allora* $\operatorname{mis}_m F(Q) = 0$.
(iii) *Se* $m > n$, *allora* $\operatorname{mis}_m F(B) = 0$.

Sotto le ipotesi del teorema di cambio di variabili nell'integrazione si dimostri che se D è un insieme misurabile la cui chiusura è contenuta in A allora Psi(D) è misurabile.