Esercizi

13.3. Dire se le successioni di funzioni dell'esercizio 13.1 convergono uniformemente nell'insieme di convergenza.

13.4. Dire se le seguenti successioni, che convergono puntualmente a 0 nell'intervallo (0, 1), convergono uniformemente in questo intervallo:

1. x^n 2. n^{-x} 3. n^{-1-x} 4. $\dfrac{\operatorname{sen} nx}{nx}$ 5. $\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{n}\,x}{nx}$ 6.* $\dfrac{\operatorname{sen} nx^2}{nx}$

13.5. Trovare il limite puntuale delle seguenti successioni di funzioni, e dimostrare che la convergenza non è uniforme in $[0, \pi]$:

1. $\sqrt[n]{\operatorname{sen} x}$ 2. $\operatorname{sen}^n x$ 3. $\dfrac{nx}{1+n^4x^4}$ 4. $\dfrac{nx}{1+nx}$

13.3. Serie di funzioni

Esercizi

A

13.1. Calcolare il limite delle seguenti successioni di funzioni di una variabile reale:

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ 3. $\dfrac{x^n}{n + x^{2n}}$ 5. $\dfrac{\operatorname{sen} nx}{nx}\,(x \neq 0)$ 7. $\dfrac{x^n + x^{3n}}{1 + x^{2n}}$

2. $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 4. $\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 6. n^x

per esempio:

1
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right|$$

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2+\frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{*} + |x|}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

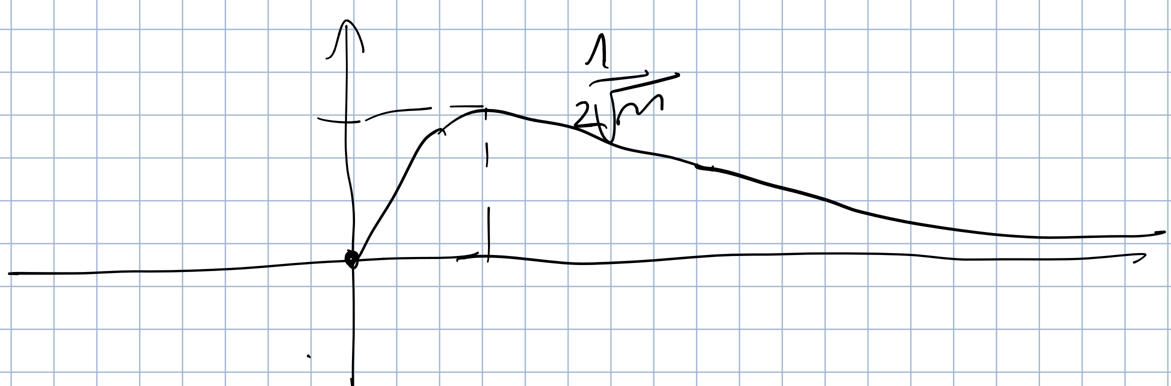
1. Sì

2. $f(x) = 0$ NON uniforme

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

3. $\frac{x^n}{n+x^{2n}} \to 0$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{n+x^{2n}} \right| = \sup_{x \geq 0} \frac{x^n}{n+x^{2n}}$$



cerco il punto critico

$$f'_n(x) = \frac{n x^{n-1}}{n + x^{2n}} - \frac{x^n \cdot (2n)\, x^{2n-1}}{(n + x^{2n})^2}$$

$$= n x^{n-1} \left[(n + x^{2n}) - 2 x^{2n} \right] = 0$$

$$x^{2n} = n \rightsquigarrow x = n^{\frac{1}{2n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left| \frac{x^n}{n + x^{2n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2n} = 0$$

4. NO (f non è continua!)

5. NO $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}/\{0\}} \left| \frac{\sin nx}{nx} \right| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sin 1$

6. $n^x \to \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ NO

una variabile reale.

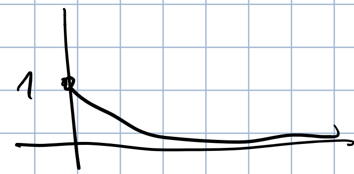
7. $\dfrac{x^n + x^{3n}}{1 + x^{2n}}$ $\to \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } |x| = 1 \end{cases}$

$\parallel$

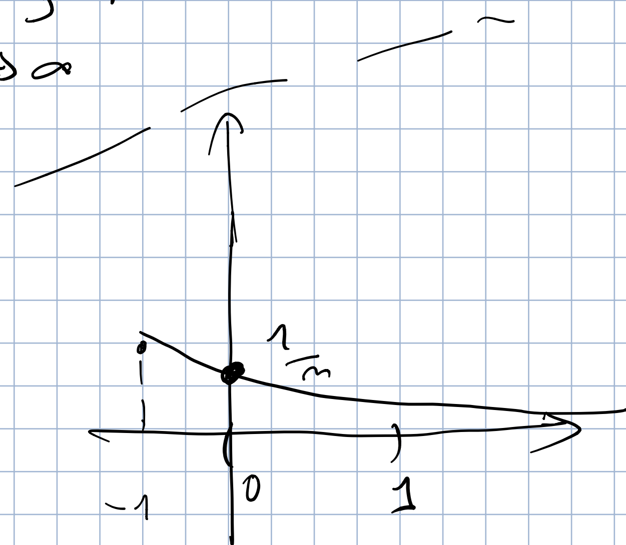
x^n

NO

2. 2. n^{-x} $\longrightarrow 0$ in $(0,1)$



$$\sup_{x\in(0,1)} n^{-x} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$



3. n^{-1-x} $\longrightarrow 0$ in $(0,1)$

$$\| \quad e^{-(1+x)\ln n}$$

$$\sup_{x\in(0,1)} n^{-x-1} = n^{-1} \to 0 \quad \text{SI}$$

$\downarrow$

decrescente in x

4. $\dfrac{\operatorname{sen} nx}{nx}$ (vedi esercizio precedente)

$x = \dfrac{1}{n}$

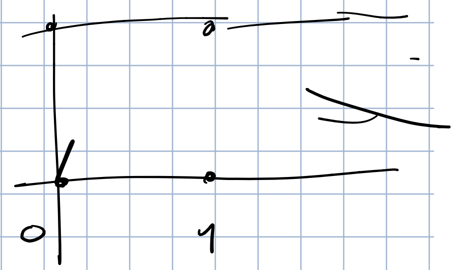
5. $\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{n}x}{nx}$ SI $\quad y = \sqrt{n}x$

funzione limitata

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin y}{\sqrt{n}\, y}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin y}{y}\right|$$

6.* $\dfrac{\operatorname{sen} nx^2}{nx}$

io sostengo che $\dfrac{\sin y^2}{y}$



$$\sup_{y\in(0,\sqrt{n})} \left|\frac{\sin y^2}{\sqrt{n}\, y}\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}} \to 0$$

Noto che $\dfrac{\sin y^2}{y} \le 1$ se $y \ge 1$

inoltre in $0,1$ è limitata

$$\Rightarrow \sup_{y\in(0,\sqrt{n})} \frac{\sin y^2}{y} < \infty \text{ NON dip. da } n \quad \square$$

1. $\sqrt[n]{\operatorname{sen} x}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} 0 & \text{se } x = k\pi \\ 1 & \text{se } x \neq k\pi \end{cases}$

2. $\operatorname{sen}^n x$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} 0 & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1) \\ 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

No lim se $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$