13.6. Dire se le serie che seguono convergono totalmente sugli insiemi indicati a fianco:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen}^k x, \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} k e^{kx}, \quad [-2, -1]$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2} \frac{e^{kx}}{1+e^{kx}} \quad [1, 3]$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k, \quad [0, 1]$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x)^k, \quad [0, 1]$
6. $\sum_{k=0}^{\infty} x^{kx}, \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$
7. $\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{9^k + x^k} - 3^k), \quad [-2, 2]$

2. Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{J=1}^{\infty} J^{\alpha} x^{J}$$ converge totalmente in $[-\delta, \delta]$ $\forall \delta < 1$.

per quali valori di α si ha convergenza totale in $[-1, 1]$?

3. Sia $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

poniamo $g_n(x) = \displaystyle\int_0^n f(x,y)\,dy$

a) Dimostrare che $\forall n \geq 1,\ g_n(x) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

(usare i criteri discussi ieri con $F = [0, n]$ ed $E = B_1(x_0)$ per dimostrare la continuità e derivabilità in ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$)

b) Dimostrare che g_n e g_n' convergono uniformemente per $n \to \infty$.

(per definizione di integrale improprio)

$$g_n \longrightarrow \int_0^\infty f(x,y)\, dy$$

Più in generale:

Se $f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e

$$|f(x,y)| \leq h(y)$$

$$|f_x(x,y)| \leq k(y)$$

tali che $\int_0^\infty h(y)\,dy < \infty$ e $\int_0^\infty k(y)\,dy < \infty$

Dimostrare che $g_n = \int_0^n f(x,y)\,dy$

è una succ. di funzioni C^1 e

g_n, g'_n convergono uniformemente e

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)\,dy = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy}$$

REM: se $h(y) \geq 0$ è integrabile in senso improprio in $[0,\infty)$ allora

$$\lim_{n \to \infty} \int_n^{\infty} h(y)\, dy = 0$$

altre possibili strategie: NOTARE che

$$\int_0^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} h(y)\, dy < \infty$$