Esercizi di ricapitolazione un po' piú complicati?

Esercizio 1. Siano $(E_i)_{i=1}^N, (n_i)_{i=1}^N$ vettori a componenti strettamente positive e per $x \in \mathbb{R}^N$ definiamo

$$W(x) := \exp(\sum_i [(n_i + x_i)\ln(n_i + x_i) - x_i \ln(x_i) - n_i \ln(n_i)])$$

Massimizzare la funzione W sul vincolo

$$\sum_{i=1}^N E_i x_i = U$$

(per calcolare il valore del moltiplicatore di Lagrange sostituire $E_i = \hbar\omega$, $n_i = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$ ed approssimare la somma con un integrale da zero a ∞)

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sum_{j=1}^N (\prod_{i \neq j} x_i)^2$. Si determini il minimo assoluto di f sul dominio

$$S = \sum_i \frac{1}{x_i^2} = 1\,.$$

Dire se S è limitato. Esiste il massimo assoluto? In affermativo calcolarlo, in caso negativo determinare l'estremo superiore.

Esercizio 3. Per $L, C, R, \omega > 0$, si consideri l' equazione differenziale

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + CI = -V\omega\sin(\omega t)$$

Si consideri per prima cosa il problema omogeneo associato

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + Cx = 0$$

e si determini per ogni soluzione $x(t)$ il limite

$$\lim_{t\to\infty} x(t)\,.$$

Si risolva quindi il problema non omogeneo con dati iniziali

$$I(0) = 0\,, \quad \dot{I} = 0\,.$$

Si cosideri quindi il caso $R = 0$, determinare L, C in modo che ci siano soluzioni non limitate.

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{2t}(x_1 + x_2)^2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{2t}(x_1 + x_2)^2 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 2.
si verifica che

$$f(x) = (\prod_i x_i)^2 \sum_i \frac{1}{x_i^2}$$

quindi sul vincolo basta che considero $g(x) = (\prod_i x_i)^2$ per la quale $f(x)|_S = g(x)$

$$\mathcal{L} = g(x) - \lambda(\sum_i \frac{1}{x_i^2} - 1)$$

viene

$$2x_j(\prod_{i\neq j} x_i)^2 + \frac{2\lambda}{x_j^3} = 0\,, \quad \forall j = 1,\dots,n$$

cioè

$$(\prod_i x_i)^2 + \frac{\lambda}{x_j^2} = 0\,, \quad \Rightarrow x_j^2 = -\frac{\lambda}{(\prod_i x_i)^2}$$

cioè tutte le componenti devono essere in modulo uguali, quindi $x_i = \pm\sqrt{n}$ per ogni $i = 1,\dots,n$. Ora S non è limitato, infatti per esempio contiene la curva

$$x_1(t) = 1 - \frac{1}{t^2}\,, \quad x_2(t) = x_3(t) = \cdots = x_n(t) = \frac{t}{\sqrt{n-1}}$$

su questa curva

$$g(x(t)) = (\frac{t}{\sqrt{n-1}})^{2(n-1)}(1 - \frac{1}{t^2})^2\,, \quad \lim_{t\to\infty} g(x(t)) = \infty\,.$$

quindi l'estremo superiore è $+\infty$. Inoltre quando una delle componenti $x_i \to \infty$ sul vincolo S tutte le altre devono essere necessariamente di modulo > 1 quindi $g(x) \to +\infty$ anche in questi casi.

Quindi $g(x)$ deve avere un minimo che è assunto nei punti $x_i = \pm\sqrt{n}$ per ogni $i = 1,\dots,n$.

Metodo più rapido:cambiare variabili!

$y_i = \frac{1}{x_i}$ in questo modo cercare un minimo per $g(x)$ su S equivale a cercare un massimo per $h(y) = (\prod_i y_i)^2$ sulla sfera unitaria $C := \{\sum_i y_i^2 = 1\}$. Va notato che $y_i = 0$ corrisponde ad un punto all'infinito per x_i. C è compatto quindi $h(y)$ su C ha max e min. Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange ottengo che il minimo è $h = 0$ quando una o più delle $y_i = 0$ (che corrisponde all'estremo superiore $g = +\infty$ quando una o piú delle $x_i = \pm\infty$), il massimo è $y_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$ che corrisponde al minimo di g.