Esercitazione di AM210, a. a. 2019/20
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 1
NORME

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti sono norme in $\mathbb{R}^3$:

(1) $\sqrt{x^2+y^2}+|z|$; (2) $|z|+\max(|x|,|y|)$;

(3) $|x|^2+|y|+|z|$; (4) $|x|+|y|$;

(5) $(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^2+|z|$; (6) $\max(|x|+|y|,|z|)$.

Esercizio 2. Provare che se $||.||$ è la norma euclidea, allora

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2+\left|\left|\frac{x-y}{2}\right|\right|^2=\frac{||x||^2+||y||^2}{2}$$

per ogni $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Esercizio 3. Dimostrare che la norma euclidea $||.||_2$ in $\mathbb{R}^2$ è equivalente alle norme:

(1) $|x|+|y|$; (2) $\sqrt{x^2+4y^2}$;

(3) $\sqrt{x^2-xy+y^2}$; (4) $\sqrt[4]{x^4+y^4}$.

Esercizio 4. Dimostrare che qualsiasi norma $||.||$ in $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla norma $||.||_1$. (Suggerimento: applicare il Teorema di Weierstrass - che vale anche per funzioni a più variabili - a $||.||:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sull'insieme $K=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,||x||_1=1\}$.)

Esercizio 5. Si consideri lo spazio $C^0([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,f \text{ è continua}\}$. Siano date le norme

$$||f||_1=\int_0^1|f(x)|dx,\qquad ||f||_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

(1) Dimostrare che $||.||_1$ e $||.||_\infty$ sono norme.

(2) Dimostrare che le due norme non sono equivalenti. (Suggerimento: considerare le funzioni $f_n(x)=x^n$ al variare di $n\in\mathbb{N}$, calcolare $||f_n||_1$, $||f_n||_\infty$ e far tendere n all'infinito.)

(3) Dedurre dall'esercizio precedente che $C^0([0,1])$ ha dimensione infinita.

Esercizio 6. Sia $X=\{x=\{x_n\}\subset\mathbb{R}\}$ lo spazio delle successioni reali. Siano date le norme

$$||x||_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p},\qquad ||x||_\infty=\sup_n|x_n|$$

e gli spazi

$$l^p=\{x\in X\,|\,||x||_p<+\infty\}$$

con $1\le p\le\infty$. Provare che se $1\le p\le q\le\infty$, risulta che $||x||_q\le||x||_p$. Dedurne che se $1\le p\le q\le\infty$ allora $l^p\subseteq l^q$.