

Esercitazione di AM210, a. a. 2018/19
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 2
LIMITI E FUNZIONI CONTINUE

Esercizio 1. Verificare che le seguenti funzioni sono continue nei punti indicati usando la definizione di limite:

- (1) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ in $(0, 1)$; (2) $f(x, y) = x(y - 1)$ in $(0, 0)$;
- (3) $f(x, y) = x(y + 1)$ in $(1, 0)$; (4) $f(x, y) = \sin(x^2 y)$ in $(0, 0)$;
- (5) $f(x, y) = \cos(x + y)$ in $(0, 0)$; (6) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ in $(0, 1)$.

Esercizio 2. Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione:

- (1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$; (2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;
- (3) $f(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{\pi}{2} & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$; (4) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;
- (5) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$; (6) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;
- (7) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$; (8) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} & x \neq -y, \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti:

- (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{2x^2} - \cos(2y)}{x^2 + y^2}$; (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$;
- (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{\log(1 + x^2 + y^2)}$; (4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{x^2 y}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$.

Esercizio 4. Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$. Si può dire lo stesso in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x \leq 1\}$?