Esercitazione di AM210, a. a. 2019/20
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 2
LIMITI E FUNZIONI CONTINUE

Esercizio 1. Verificare che le seguenti funzioni sono continue nei punti indicati usando la definizione di limite:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ in $(0,1)$; (2) $f(x,y)=x(y-1)$ in $(0,0)$;

(3) $f(x,y)=x(y+1)$ in $(1,0)$; (4) $f(x,y)=\sin(x^2y)$ in $(0,0)$;

(5) $f(x,y)=\cos(x+y)$ in $(0,0)$; (6) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ in $(0,1)$.

Esercizio 2. Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; (2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0),\\ \dfrac{\pi}{2} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; (4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(5) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; (6) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(7) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; (8) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^3+y^3} & x\neq -y,\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{2x^2}-\cos(2y)}{x^2+y^2}$; (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$; (4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-e^{x^2y}}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

Esercizio 4. Stabilire se la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0\end{cases}$$

è continua in $(0,0)$. Si può dire lo stesso in $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\leq x\leq 1\}$?.