Esercitazione di AM210, a. a. 2018/19
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 3
DIFFERENZIABILITA'

Esercizio 1. Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali, differenziabilità per le seguenti funzioni:

(1) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ \dfrac{\pi}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

(4) $f(x,y) = \begin{cases} y\log\left(2+\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

(5) $f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}x^2y & y \geq 0, \\ \dfrac{e^{xy}-1}{y} & y < 0 \end{cases}$;

(6) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{1-x^2-y^2}} & x^2+y^2 < 1, \\ 0 & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$.

Esercizio 2. Verificare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile nel punto $(0,0)$ pur avendo entrambe le derivate parziali ivi discontinue.

Esercizio 3. Dimostrare che sono definite e differenziabili su $\mathbb{R}^2$ le funzioni

$$f(x,y) = \int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad g(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1-\cos t}{t^{5/2}}\,dt.$$

Esercizio 4. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico, nel punto (x_0, y_0) indicato, delle seguenti funzioni:

(1) $f(x,y) = x^4y^2 - 3xy + 2y$, $(x_0,y_0) = (1,1)$;

(2) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $(x_0,y_0) = (0,1)$;

(3) $f(x,y) = \sin(xy)$, $(x_0,y_0) = (1,0)$;

(4) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$, $(x_0,y_0) = (\pi,0)$;

(5) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

(6) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$, $(x_0,y_0) = (1,1)$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ omogenea di grado α e sia $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) Posto $\xi := \dfrac{(x,y)}{||(x,y)||}$, dimostrare che

$$||(x,y)||\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

.

(2) Dimostrare che se la funzione è C^1, allora vale la **formula di Eulero**: $(x,y) \cdot \nabla f(x,y) = \alpha f(x,y)$.

Esercizio 6. Sia f una funzione omogenea di grado α che ammetta derivate parziali su $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(1) Dimostrare che le derivate parziali sono funzioni omogenee di grado $\alpha - 1$.
(2) Dimostrare che se f è C^1 su $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e $\alpha > 1$, allora f è C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.