

Esercitazione di AM210, a. a. 2018/19
Corso di Laurea in Matematica
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 3
DIFFERENZIABILITA'

Esercizio 1. Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali, differenziabilità per le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x, y) &= \sqrt{|xy|}; & (2) \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \\
 (3) \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{\pi}{2} & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; & (4) \quad f(x, y) &= \begin{cases} y \log \left(2 + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \\
 (5) \quad f(x, y) &= \begin{cases} x + \frac{1}{2} x^2 y & y \geq 0, \\ \frac{e^{xy} - 1}{y} & y < 0 \end{cases}; & (6) \quad f(x, y) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{1 - x^2 - y^2}} & x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Esercizio 2. Verificare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile nel punto $(0, 0)$ pur avendo entrambe le derivate parziali ivi discontinue.

Esercizio 3. Dimostrare che sono definite e differenziabili su \mathbb{R}^2 le funzioni

$$f(x, y) = \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \quad g(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1 - \cos t}{t^{5/2}} dt.$$

Esercizio 4. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico, nel punto (x_0, y_0) indicato, delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x, y) &= x^4 y^2 - 3xy + 2y, \quad (x_0, y_0) = (1, 1); & (2) \quad f(x, y) &= \frac{x+y}{x-y}, \quad (x_0, y_0) = (0, 1); \\
 (3) \quad f(x, y) &= \sin(xy), \quad (x_0, y_0) = (1, 0); & (4) \quad f(x, y) &= \sin(x) + \sin(y), \quad (x_0, y_0) = (\pi, 0); \\
 (5) \quad f(x, y) &= e^{-x^2 - y^2}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0); & (6) \quad f(x, y) &= \arctan \frac{y}{x}, \quad (x_0, y_0) = (1, 1).
 \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctan \left(\frac{x}{y} \right) & y \neq 0, \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

- (1) dimostrare che è differenziabile in tutto \mathbb{R}^2 ;
- (2) dimostrare che $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.