Esonero 24-11

November 24, 2017

Esercizio 1.
Calcolare **al piú tre su quattro** fra i seguenti limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x+1)}{\sqrt{x}}\,, \qquad (b)\quad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{2x^3+x}\,,$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^3)\sin(2x^2+5x^6)}{(1-\cos(2x))\sin(x^2)\ln(1-2x)} \qquad (d)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x+e^{\sqrt{x}}-1}{\ln(1+\sqrt{x})}$$

Esercizio 2.
Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\quad \ln_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+1) < 2\,, \qquad (b)\quad 3^{x^2+2x+3} > \frac{1}{9}$$

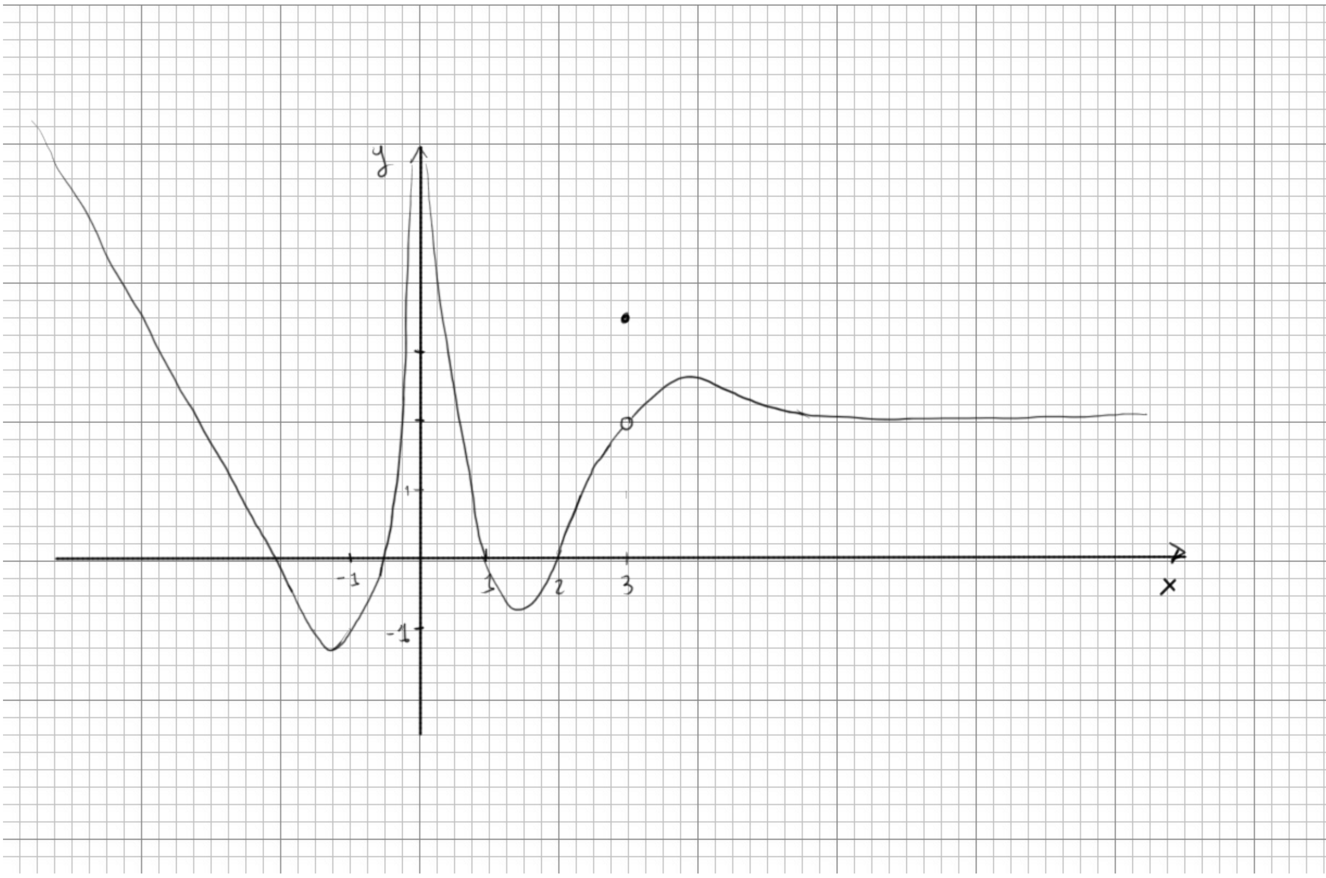
Esercizio 3.

Data la funzione il cui grafico e' rappresentato in figura determinare:
Dominio, Immagine.
L'immagine di $[1, 2]$, L'immagine di $\{3\}$;
La controimmagine di $(-1, 0)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)\,, \quad \lim_{x\to 1} f(x)$$

$f(x)$ é continua in $x = 2$? In $x = 3$?
Determinare i punti di minimo e di massimo relativi.
Sapendo che $f(x) \sim 1/x^2$ per $x \to 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0} x^3 f(x)$$



(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos(x+1)}{\sqrt{x}} = 0$

infatti $-1 \leq \cos(x+1) \leq 1$

e quindi $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \leq \frac{\cos(x+1)}{\sqrt{x}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{2x^3+x} =$

$\left(\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{x^3}\right)^{\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3+x}{x^3}} = e^2$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x^3) \sin(2x^2+5x^6)}{(1-\cos(2x)) \sin(x^2) \ln(1-2x)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cdot 2x^2}{\frac{(2x)^2}{2} \cdot x^2 \cdot (-2x)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

$\arctan(x^3) \sim x^3$; $\sin(2x^2+5x^6) \sim 2x^2+5x^6 \sim 2x^2$

$(1-\cos(2x)) \sim \frac{(2x)^2}{2}$; $\sin(x^2) \sim x^2$; $\ln(1-2x) \sim -2x$

(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x + e^{\sqrt{x}} - 1}{\ln(1+\sqrt{x})} =$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \qquad \left(e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x} \right)$

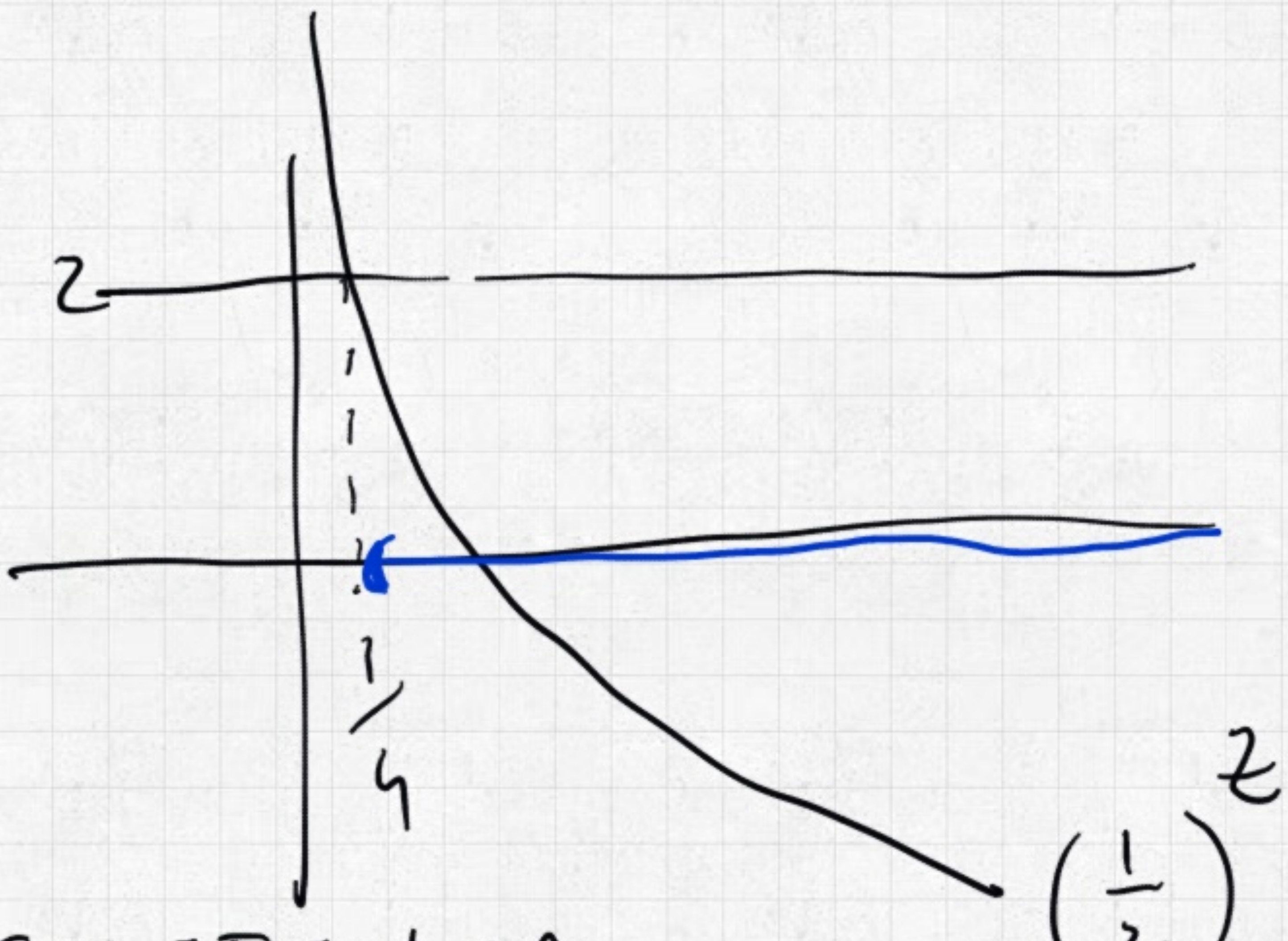
Esercizio 2.

(a) $\ln_{\frac{1}{2}} (x^2 + 6x + 1) < 2$

$\ln_{\frac{1}{2}}(z) < 2 \iff z > \frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$x^2 + 6x + 1 > \frac{1}{4}$



(NON SERVE FARE L'ESISTENZA

se $x^2 + 6x + 1 > \frac{1}{4}$ allora è anche > 0.

$x^2 + 6x + \frac{3}{4} > 0$

trovo gli zeri $\quad x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 3}}{2} =$

$-3 \pm \dfrac{\sqrt{33}}{2}$

RISPOSTA: $\quad x < -3 - \dfrac{\sqrt{33}}{2} \ \cup \ x > -3 + \dfrac{\sqrt{33}}{2}$

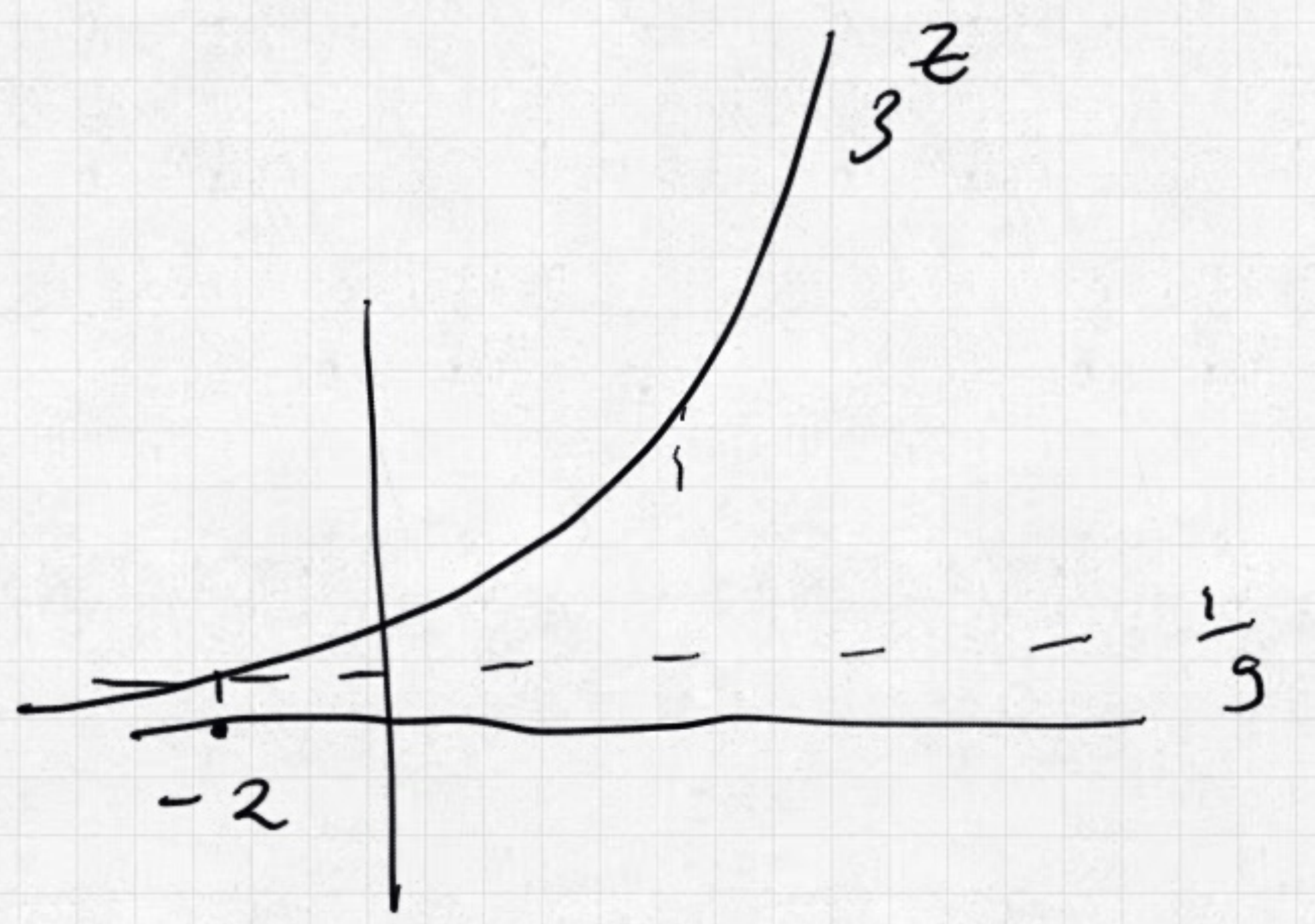
(b) $\quad 3^{x^2+2x+3} > \frac{1}{9}$

$x^2+2x+3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

quindi $\quad 3^{x^2+2x+3} \geq 3^2 = 9 > \frac{1}{9} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

la risposta è SEMPRE!

MODO ANALITICO:



$3^z > \frac{1}{9} \Rightarrow z > -2$

$x^2+2x+3 > -2$

$x^2+2x+5 > 0$ questa parabola ha $\Delta < 0$ e $a > 0$ quindi è

SEMPRE POSITIVA.

Esercizio 3.

Dominio $\mathbb{R}/\{0\}$

Immagine $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$

Immagine di $[1,2] \Rightarrow [0, \frac{3}{4}]$

Controimmagine di $(-1, 0)$

[SCUSATE!]

$(-2, -1.5) \cup (-1, \frac{1}{2}) \cup (1, 2)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

Continua in $x = 2$ SI

" " in $x = 3$ NO

MINIMI RELATIVI

$x = -\frac{5}{4}$; $x = 1,5$

MAX RELATIVI

$x = 3$; $x = 4$ (forse $4 - \frac{1}{8}$)

$\lim_{x \to 0} x^3 f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$