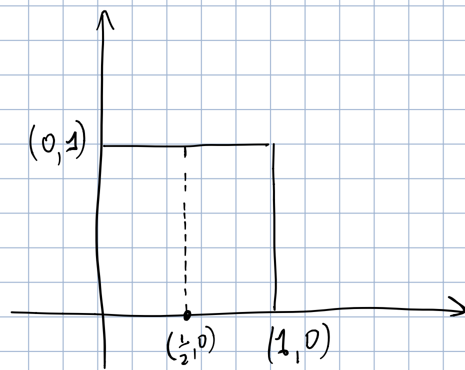
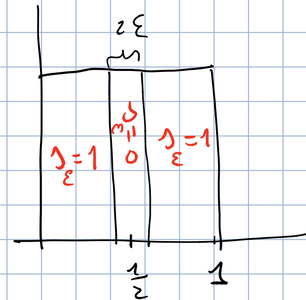
Esercizio 3.2 Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 se $x_1 \neq 1/2$ e, per $x_1 = 1/2$ la funzione $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ vale 1 se x_2 è irrazionale e 0 se x_2 è razionale. Si dimostri che f è integrabile su $[0,1]^2$ (mentre, come sappiamo, $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ non è integrabile su $[0,1]$).





$\forall \varepsilon > 0$ definisco la funzione semplice

$$s_\varepsilon(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x_1 - \frac{1}{2}| > \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x_1 - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$\int s_\varepsilon(\vec{x})\, d\vec{x} = 1 - 2\varepsilon$$

questa è la funzione caratteristica del quadrato $[0,1]^2$

$$s_\varepsilon(x_1, x_2) \leq f(x_1, x_2) \leq \varphi_{[0,1]^2}(x_1, x_2)$$

quindi $f(x_1, x_2)$ è integrabile e $\int_{[0,1]^2} f(\vec{x})\, d\vec{x} = 1$

i) φ è anche iniettiva? [Risposta: no]

Esercizio 3.6 (Integrali impropri I) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme *non limitato*. Supponiamo che per ogni $r > 0$, l'insieme $A_r := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le r\}$ sia misurabile. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile su A_r per ogni $r > 0$.

Definizione 3.8 *Se esiste finito il limite*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{A_r} |f| < \infty \tag{3.65}$$

si dice che f è integrabile su A e si pone

$$\int_A f = \lim_{r\to\infty} \int_{A_r} f \ . \tag{3.66}$$

(i) Si controlli che tale definizione è ben posta.
(ii) Dire se $f = e^{-|x|}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$ (nel senso della definizione appena data) e, in caso affermativo, si stimi $\int_{\mathbb{R}^n} f$.
[Suggerimento: si noti che $\exp(-|x|) \le \exp(-\frac{1}{\sqrt{n}}|x|_1)$.]
(iii) Sia $n = 2$ e $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \le 1\}$. Si dica se è integrabile su A la funzione $f = x_1^{100}(\cos x_2)(1+|x_2|)^{-\frac{3}{2}}$ e, in caso affermativo, si stimi $\int_A f$.

(ii) Per gli integrali impropri in $\mathbb{R}^n$ vale lo stesso criterio di confronto degli integrali impropri su $\mathbb{R}$.

cioè se $0 \le f \le g$ e g è integrabile in senso improprio allora lo è anche f e

$$\int_A f \le \int_A g \ .$$

(questa è la NORMA EUCLIDEA!)

ora $f(x) = e^{-|x|}$

$$e^{-|x|} \le e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}|x|_1} \qquad \left(|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)$$

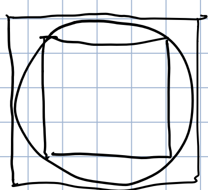
a sua volta $e^{-\frac{|x|_1}{\sqrt{n}}} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{|x_i|}{\sqrt{n}}}$

ora la funzione $g(x) = e^{-\frac{|x|_1}{\sqrt{n}}} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{|x_i|}{\sqrt{n}}}$

è continua quindi posso applicare

il teorema di Fubini. Noto che in questo

caso A_r è la palla di raggio r. ora



$$Q_{\frac{r}{\sqrt{n}}} \subseteq A_r \subseteq Q_r$$ ← quadrato n dim di lato r.

$$\int_{Q_{\frac{r}{\sqrt{n}}}} g(x)dx \leq \int_{A_r} g(x)dx \leq \int_{Q_r} g(x)dx$$

$$\begin{array}{c} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\frac{r}{\sqrt{n}}}^{\frac{r}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{|x_i|}{\sqrt{n}}} dx_i \\ \| \end{array} \leq \int_{A_r} g(x)dx \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{-r}^{r} e^{-\frac{|x_i|}{\sqrt{n}}} dx_i$$

$$\left(\sqrt{n} \int_{-\frac{r}{n}}^{\frac{r}{n}} e^{-y} dy \right)^n \leq \int_{A_r} g(x)\,dx \leq \left(\sqrt{n} \int_{-\frac{r}{\sqrt{n}}}^{\frac{r}{\sqrt{n}}} e^{-y} dy \right)^n$$

$$\downarrow r \to \infty \qquad\qquad\qquad \downarrow r \to \infty$$

$$2 n^{\frac{n}{2}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \leq 2 n^{\frac{n}{2}}$$

quindi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \leq 2n^{\frac{n}{2}}$

N.B. se sapessimo USARE LE coordinate sferiche in $\mathbb{R}^n$ l'integrale si calcola!