Prova II esonero di AM210/Analisi Matematica II

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

(I conti sono un po pesanti)

1. Trovare massimi e minimi assoluti (se ci sono) della funzione

$$f(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^2$$

sul vincolo $x^2 + y^2 - z = 1$.

Il vincolo è esplicitabile come

$$z = x^2 + y^2 - 1$$

su cui si tratta di determinare i massimi e minimi liberi.

$$f(x,y,x^2+y^2-1) = x^4+y^4+x^4+y^4+2x^2y^2+1-2(x^2+y^2) = 2(x^4+y^4-x^2-y^2+x^2y^2)+1.$$

Evidentemente la funzione NON e' limitata superiormente, quindi è inutile cercare i massimi. Per determinare il minimo si calcola il gradiente. Si ha che

$$\nabla f = (8x^3 - 4x + 2xy^2, 8y^3 - 4y + 2x^2y) = 0$$

ha come soluzioni

$$(x,y) = (0,0) \quad (x,y) = (0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (x,y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \quad (x,y) = (\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \pm\sqrt{\frac{2}{5}})$$

Vado a calcolare la funzione nei punti, il valore minimo è ottenuto in $(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \pm\sqrt{\frac{2}{5}})$.

2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) := \begin{cases} x^2 + y^2 + 3xz \\ z + 2xy + y^2 \end{cases}$$

Dire se l' equazione $f(x,y,z) = (2,-1)$ è esplicitabile intorno a $(1,-1,0)$; in caso affermativo, rispetto a quali variabli?

Determinare la funzione esplicitante.

S tratta di una funzione da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, quindi esplicitare $f(x,y,z) = (2,-1)$ equivale a scrivere due delle variabili in funzione della terza. Per il teorema della funzione implicita basta calcolare lo Jacobiano di f in $(1,-1,0)$

e verificare che ha rango massimo. Inoltre è esplicitabile rispetto a quelle variabili il cui corrispondente minore ha determinate $\neq 0$.

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y & 3x \\ 2y & 2x+2y & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando in $(1,-1,0)$ ho

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango massimo e tutti e tre i minori 2×2 invertibili, quindi si possono esplicitare sempre due variabili in termini della terza.

Per calcolare la funzione esplicitante, ad esempio risolviamo prima la seconda equazione esplicitando

$$z = -1 - 2xy - y^2.$$

Sostituendo nella prima equazione troviamo

$$x^2 + y^2 - 3x - 6x^2y - 3xy^2 - 2 = 0$$

quindi risolvendo per la x si ha

$$x = \frac{3(1-y^2) + \sqrt{9(1-y^2)^2 + 4(1-6y)(2-y^2)}}{2(1-6y)}$$

notare che vicino al punto $(1,-1,0)$ il denominatore è diverso da zero e l'argomento della radice èr positivo. Per finire è stata scelta la determinazione positiva della radice perchè si vuole rimanere vicini a $x = 1$.

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^{-t} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $(\lambda + 1)^2$. Quindi, due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata sono e^{-t}, te^{-t}. Cerco una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma

$$x(t) = c(t)e^{-t}$$

La funzione incognita $c(t)$ deve risolvere l'equazione differenziale

$$(\ddot{c} - 2\dot{c} + c + 2(\dot{c} - c) + c)e^{-t} = te^{-t} \quad \rightarrow \ddot{c} = t \quad \rightarrow c = \frac{t^3}{6}$$

Quindi la soluzione generale è

$$x(t) = (a + bt + \frac{t^3}{6})e^{-t}$$

quindi imponendo il dato iniziale si ha $a = 0, b = 1$.