III esonero Analisi 2 - recupero

1. Sia
$$E := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ \text{tali che } \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}\,.$$
Si consideri il campo vettoriale
$$F(x,y,z) := (-y,x,z)\,.$$
Verificare il teorema della divergenza, ovvero mostrare che
$$\int_E \nabla \cdot F\, dxdydz = \int_{\partial E} F \cdot \hat{n}\, d\sigma\,.$$
Calcolare il flusso
$$\int_S \text{rot}(F) \cdot \hat{n} d\sigma$$
dove
$$S := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ \text{tali che } x^2+y^2 = z \le 1\}$$

2. Si consideri la forma differenziale
$$\omega := (\ln|y| + x)dx + (\frac{x}{y} + 1)dy\,.$$
Si indichi il dominio massimale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ di ω. Si dica se ω è chiusa e se è esatta. Se la forma è esatta si calcoli il potenziale f tale che $\omega = df$. Si calcoli l'integrale (lavoro) di ω sul segmento che parte dal punto $(1,1)$ e arriva nel punto $(2,2)$.

3. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})|$.

4. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n\ge 0} (|x - \frac{1}{2}|^n + |x + \frac{1}{2}|^n)\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$