II esonero di
AM210/Analisi Matematica II, 9-1-2019

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Trovare il massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) := x^{10} - y^4 + 3y^2$$

sul vincolo $|x|^5 + y^2 = 1$.
Domanda supplementare: Stessa domanda, stesso vincolo ma per la funzione

$$g(x,y) := x^{10} - y^4 + 2y^2$$

Il vincolo definisce un compatto, quindi massimo e minimo devono esistere. Sostituendo in $f(x,y)$ il vincolo si ottiene

$$f(x,y)|_{|x|^5=1-y^2} = 1 + y^4 - 2y^2 + 3y^2 = 1 + y^2$$

con $y^2 \leq 1$. Il minimo si ottiene quindi in $y = 0$ mentre il massimo in $y = \pm 1$. In conclusione il valore massimo della funzione sul vincolo è 2 ottenuto in $(0, \pm 1)$ mentre il minimo è 1 ottenuto in $(\pm 1, 0)$.

La funzione $g(x,y)$ è costante sul vincolo e vale 1, quindi max e min coincidono.

2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := 2e^y x^4 - 4 + 2x^2 \cos(y)$$

Dire se l' equazione $f(x,y) = 0$ è esplicitabile intorno a $(1,0)$; in caso affermativo, rispetto a quali variabli? Dare una formula esplicita.
Domanda supplementare: $f(x,y) = 0$ definisce globalmente un'unica funzione $x = g(y)$? Giustificare la risposta.

Calcolando lo Jacobiano si ha che $Jf(1,0) = (12,2)$ quindi la funzione è esplicitabile sia esprimendo y in funzione di x che viceversa. Dato che f è una biquadratica in x, determino questa espressione. Si ha

$$x^2 = \frac{-\cos(y) + \sqrt{\cos^2 y + 8e^y}}{2e^y}$$

Dato che l'altra determinazione

$$\frac{-\cos(y) - \sqrt{\cos^2 y + 8e^y}}{2e^y}$$

é negativa vicino a $y = 0$ (in effetti è SEMPRE negativa). Quindi ottengo

$$x = \sqrt{\frac{-\cos(y) - \sqrt{\cos^2 y + 8e^y}}{2e^y}}$$

La determinazione negativa NON passa per $(1, 0)$. La funzione NON è globalmente invertibile perchè non è iniettiva. La regione che determina $f(x, y) = 0$ è descritta dal grafico delle DUE funzioni

$$x = \sqrt{\frac{-\cos(y) - \sqrt{\cos^2 y + 8e^y}}{2e^y}}, \quad x = -\sqrt{\frac{-\cos(y) - \sqrt{\cos^2 y + 8e^y}}{2e^y}}$$

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + e^{\frac{4t}{3}} x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Detta $x(t, x_0)$ la soluzione, derminare i valori di x_0 tali che la soluzione sia definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per tali valori di x_0 determinare

$$\lim_{t \to \infty} x(t, x_0).$$

Suggerimento: Sostituire $x(t) = e^{-2t} y(t)$, scrivere e risolvere l'equazione differenziale per $y(t)$.

Sostituendo nell'equazione ottengo

$$\dot{x}(t) = -2e^{-2t} y(t) + e^{-2t} \dot{y}(t) = -2e^{-2t} y(t) + e^{\frac{4}{3}t} (e^{-2t} y(t))^2$$

Sostituiendo nel dato iniziale ottengo $x(0) = y(0) = x_0$, cioè semplificando

$$\begin{aligned} \dot{y} &= e^{-\frac{2t}{3}} y^2 \\ y(0) &= x_0 \end{aligned}$$

risolvo per separazione di variabili

$$\int_{x_0}^{e^{2t} x(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t e^{-2\tau/3} d\tau$$

ottengo

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{e^{2t}x(t)} = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t/3})$$

cioè

$$x(t) = \frac{2x_0 e^{-2t}}{2 - 3x_0(1 - e^{-2t/3})}$$

La soluzione è definita purché il denominatore sia $\neq 0$, cioè per

$$t \neq \frac{3}{2}\ln(1 - \frac{2}{3x_0})$$

quindi per essere definita globalmente non ci devono essere soluzioni a tale equazione, cioè deve essere $1 - \frac{2}{3x_0} \leq 0$.

In conclusione la soluzione è definita globalmente se $x_0 \leq \frac{2}{3}$. In tali casi il limite viene

$$\lim_{t\to\infty} = \frac{2x_0 e^{-2t}}{2 - 3x_0(1 - e^{-2t/3})} = 0.$$