

II esonero di AM210/Analisi Matematica II, 9-1-2019

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Trovare il massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) := x^6 - y^4 + y^2$$

sul vincolo $|x|^3 + y^2 = 1$.

Domanda supplementare: Stessa domanda, stesso vincolo ma per la funzione

$$g(x, y) := x^6 - y^4 + 2y^2$$

2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) := 2x^4 - 4e^{2y} + 2x^2 \cos(y)$$

Dire se l'equazione $f(x, y) = 0$ è esplicitabile intorno a $(1, 0)$; in caso affermativo, rispetto a quali variabili? Dare una formula esplicita.

Domanda supplementare: $f(x, y) = 0$ definisce globalmente un'unica funzione $x = g(y)$? Giustificare la risposta.

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + e^{\frac{t}{3}} x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Detta $x(t, x_0)$ la soluzione, determinare i valori di x_0 tali che la soluzione sia definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per tali valori di x_0 determinare

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0).$$

Suggerimento: Sostituire $x(t) = e^{-t} y(t)$, scrivere e risolvere l'equazione differenziale per $y(t)$.