II Esonero AM220

1. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})|$.

Soluzione

$f(x) = |\cos(x)|$ è periodica di periodo π ed è pari. Calcolo i coefficienti di Fourier a_n (dato che $b_n = 0$)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\cos(nx)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(nx)dx$$

ricordando che

$$\cos(x)\cos(nx) = \frac{1}{4}(e^{ix}+e^{-ix})(e^{inx}+e^{-inx}) = \frac{1}{2}(\cos((n+1)x)+\cos((n-1)x))$$

ottengo

$$a_n = \frac{2}{\pi}(\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2}}{n-1})$$

che posso riscrivere come

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n = 2k+1 \\ -\frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} & \text{if} \quad n = 2k \end{cases}$$

quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kx)$$

ovviamente ci sono molti altri modi per fare il conto!

Altra proposta:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}a_n &= \int_0^{\pi} |\cos x| \cos nx \; dx \\
&\overset{x=y+\pi/2}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin y|(\cos\frac{n\pi}{2}\cos ny - \sin\frac{n\pi}{2}\sin ny)dy \\
&= 2\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \sin y \cos ny \; dy \\
&= \cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(1+n)y + \sin(1-n)y \; dy \\
&= 2\cos\frac{n\pi}{2}\frac{n\sin(n\pi/2) - 1}{n^2-1} \, .
\end{aligned}$$

Quindi $a_{2k+1} = 0$ mentre

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \,.$$

2. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 0} (|x - \frac{1}{2}|^n + |x + \frac{1}{2}|^n) \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

Soluzione: Applicando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} (((|x+\frac{1}{2}|^n + |x - \frac{1}{2}|^n) 2^{-\sqrt{n}})^{1/n} = \max\{|x+\frac{1}{2}|, |x-\frac{1}{2}|\} < 1$$

per $|x| \leq \frac{1}{2}$ (convergenza puntuale). Agli estremi la serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$$

dato che definitivamente $2^{-\sqrt{n}} < n^{-2}$ la serie è convergente in $|x| = \frac{1}{2}$ quindi si ha gonvergenza totale ed uniforme in $|x| \leq \frac{1}{2}$.

3. Siano

$$g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \,, \quad g_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

determinare, il raggio di convergenza delle serie di potenze. Calcolare la derivata $g_2^{(100)}(0)$. Scrivere g_1 in termini di funzioni elementari.
Domanda supplementare: Scrivere g_2 in termini di funzioni elementari.

Soluzione Per il criterio della radice il raggio di convergenza è infinito. Inoltre

$$g_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(x)}{x}$$

ora

$$2g_2(x) + g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

quindi

$$g_2(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \frac{1}{x}\sin(x))$$