Primo esonero di
AM210/Analisi Matematica II, 12-11-2019

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. (12 punti) Dire se la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^6 \sin x}{x^3 + y^3} & \text{se } \ x \neq -y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$. Determinare (utilizzando la definizione) la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ dove $v = (1,-2)$.

2. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$$

trovarne i punti stazionari e discuterne la natura. Suggerimento (dato durante lo scritto) f è una funzione radiale.

3. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - y^2 + 1$$

Verificare che $f(x,y) = 0$ è localmente esplicitabile come $y = g(x)$ vicino al punto $(x_0, y_0) = (1,-1)$. Verificare che x_0 è un punto critico per la funzione $g(x)$. Determinare la funzione esplicitante $g(x)$.

domanda in piú: Il punto critico è un massimo o un minimo?

congegni elettronici, etc.

1. (12 punti) Dire se la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^6 \sin x}{x^3+y^3} & \text{se } x \neq -y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$. Determinare (utilizzando la definizione) la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ dove $v=(1,-2)$.

La funzione NON è continua. Basta calcolare il limite lungo la curva

$$\begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = t + t^5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{matrix} \qquad (*)$$

Se esiste $t \to (x(t), y(t))$ curva CONTINUA tale che $(x(0), y(0)) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) \neq f(0,0)$$

allora $f(x,y)$ NON è continua in $(0,0)$

ORA sulla curva $(*)$ si ha

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{(t+t^5)^6 \sin(-t)}{(t+t^5)^3 - t^3} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-t^6 \sin t \cdot (1+t^4)^6}{t^3\left[(1+t^4)^3 - 1\right]} =$$

$$\lim_{t\to 0} -t^4 \cdot \frac{\sin t}{t} \frac{1}{(1+3t^4+3t^8+t^{12}-1)} =$$

$$\lim_{t\to 0} -\frac{\sin t}{t} \frac{t^4}{3t^4+3t^8-t^{12}} = -\frac{1}{3} \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{(v_1 t)^6 \sin(v_2 t)}{(v_1 t)^3 + (v_2 t)^3} =$$

$$\lim_{t\to 0} -\frac{t^6 \sin(2t)}{t^3(1-8)} = 0$$

2. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$$

trovarne i punti stazionari e discuterne la natura. Suggerimento (dato durante lo scritto) f è una funzione radiale.

3. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 1 - (x^2+y^2-1)^2$$

che ha un massimo assoluto per $x^2+y^2=1$.

Calcoliamo i punti critici.

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2-1)\cdot 2x = 0 \\ 2(x^2+y^2-1)\cdot 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \quad e \quad x^2+y^2=1$$

I punti critici sono $(0,0)$ e

$S_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x = \cos\theta, y = \sin\theta \quad \theta \in (0,2\pi) \}$

Abbiamo visto che $f(\cos\theta, \sin\theta) = 1$

(che è il valore MAX della funzione)

quindi S_1 è costituita di punti di

MASSIMO DEGENERE.

Per studiare la natura di $(0,0)$ calcoliamo

la matrice Hessiana

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} > 0$$

quindi $(0,0)$ è un punto di MINIMO

locale STRETTO.

3. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - y^2 + 1$$

Verificare che $f(x,y) = 0$ è localmente esplicitabile come $y = g(x)$ vicino al punto $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Verificare che x_0 è un punto critico per la funzione $g(x)$. Determinare la funzione esplicitante $g(x)$.

domanda in piú: Il punto critico è un massimo o un minimo?

$f(1,-1) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x^2y - 2y = 2 \neq 0$

quindi deve esistere $g(x)$ ben definita

e derivabile (addirittura C^∞ dato che

$f(x,y)$ lo è) in un intorno $(1-\rho, 1+\rho)$

tale che $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall\, x \in (1-\rho, 1+\rho)$

Quindi per verificare che $x_0 = 1$ è un punto critico basta verificare che $g'(x_0) = 0$

ora per il TFI $g'(x_0) = -\dfrac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$

e $f_x(1, -1) = 0$.

Per vedere la natura del punto critico calcolo la derivata seconda.

$$0 = \frac{d^2}{dx^2} f(x, g(x)) = \frac{d}{dx}\left(f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) \cdot g'(x) \right) =$$

$$= f_{xx}(x, g(x)) + 2 f_{xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) + f_{yy}(g'(x))^2 + f_y\, g''(x)$$

quindi calcolando in x_0 e ricordando che

$g(x_0) = y_0$ e $g'(x_0) = 0$

$$g''(x_0) = \frac{-f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{8}{2} = -4$$

è un massimo!

$f(x,y) = 0$ è una biquadratica rispetto a y

$$y^4 - (2x^2+1)y^2 + x^4 + 1 = 0$$

ci sono 4 soluzioni possibili (4 funzioni)

$$y = \pm \sqrt{\frac{(2x^2+1) \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4x^4 - 4}}{\sqrt{2}}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(2x^2+1) \pm \sqrt{4x^2 - 3}}{\sqrt{2}}}$$

Devo trovare quella che passa per $(1,-1)$

$$y = - \sqrt{\frac{(2x^2+1) - \sqrt{4x^2-3}}{\sqrt{2}}}$$