12.1. L'integrazione

Come il calcolo differenziale, anche la teoria dell'integrazione si estende a funzioni di più variabili. Per semplicità, ci limiteremo anche qui – almeno nelle dimostrazioni dei teoremi – al caso di due variabili. Avvertiamo comunque che i risultati valgono con le opportune modifiche anche per funzioni di n variabili.[1]

Per quanto riguarda la definizione di funzioni integrabili, non c'è grande differenza rispetto al caso di una variabile; il solo punto di una certa rilevanza consiste nel fatto che mentre in una variabile gli integrali si facevano prevalentemente su un intervallo, ora non ci sono domini di integrazione privilegiati. I più semplici sono ovviamente i rettangoli, ma spesso si devono calcolare integrali estesi a triangoli, cerchi, ellissi, o altro.

D'altra parte ci si può ridurre a considerare sempre l'integrale su tutto $\mathbf{R}^2$; infatti se si vuole integrare una funzione limitata $f(\mathbf{x})$ su un insieme E limitato, basterà porre uguale a zero la funzione f fuori di E. La nuova funzione f^*, che vale f in E e zero fuori di E, sarà limitata (perché f era limitata in E) e varrà 0 fuori di un rettangolo (basterà prendere un rettangolo che contiene E). In questo modo, almeno formalmente, si elimina dalla definizione la considerazione dell'insieme di integrazione.

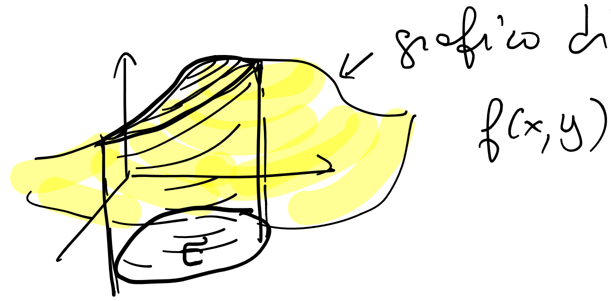
In generale se voglio calcolare l'integrale di f LIMITATA su un insieme E LIMITATO definisco la FUNZIONE CARATTERISTICA di E ; $\chi_E(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{x} \in E \\ 0 & \text{se } \vec{x} \notin E \end{cases}$

in modo che

$$f_R(x) = f(x)\,\chi_E$$

N.B. l'integrale di f sull'insieme E

$$\int_E f(\vec{x})\,d\vec{x}$$ è il volume

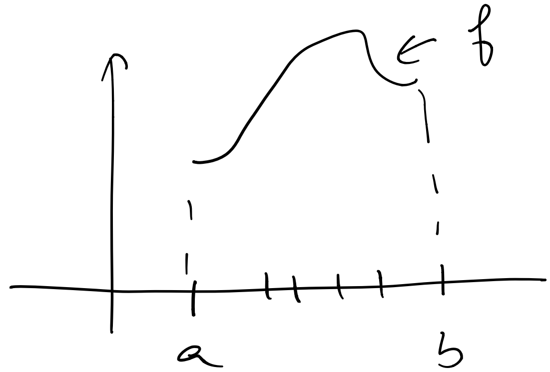


del cilindro che ha come base inferiore E e come base superiore il grafico di f

N.B. E può essere anche complicato

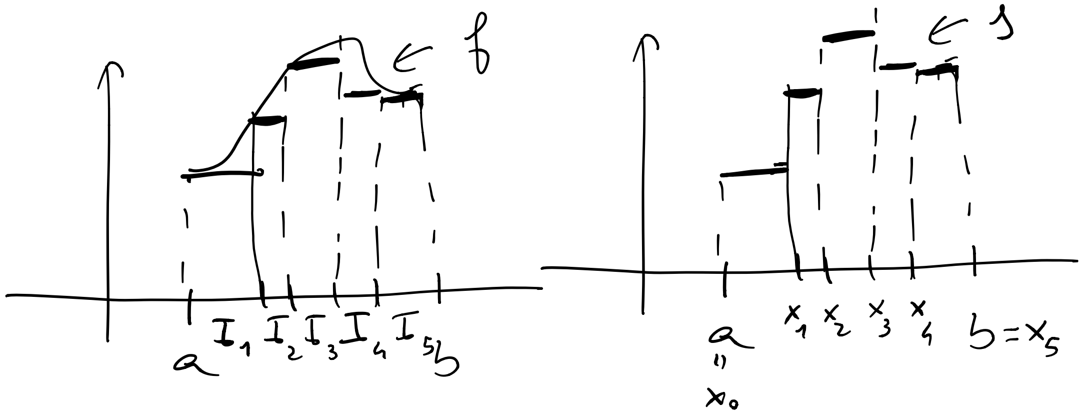
Per calcolare il volume si usa un metodo di approssimazione con VOLUMI NOTI
(proprio come nel caso di funzioni di 1 variabile si usano aree NOTE.)

1. DIM



introduco una <u>Partizione</u> di (a,b) in intervalli $I_1, \dots, I_n$
(NON NECESSARIAMENTE uguali tra loro)

APPROSSIMO f con una funzione costante a tratti s



$$s(x) = \left\{ \inf_{x_1 \in I_J} (f(x_1)) \quad \text{per } x \in I_J \right.$$

$$\int f(x)\,dx \geq \int s(x)\,dx = \sum \Big(\inf_{y \in I_J} f(y) \Big) |x_i - x_{i-1}|$$

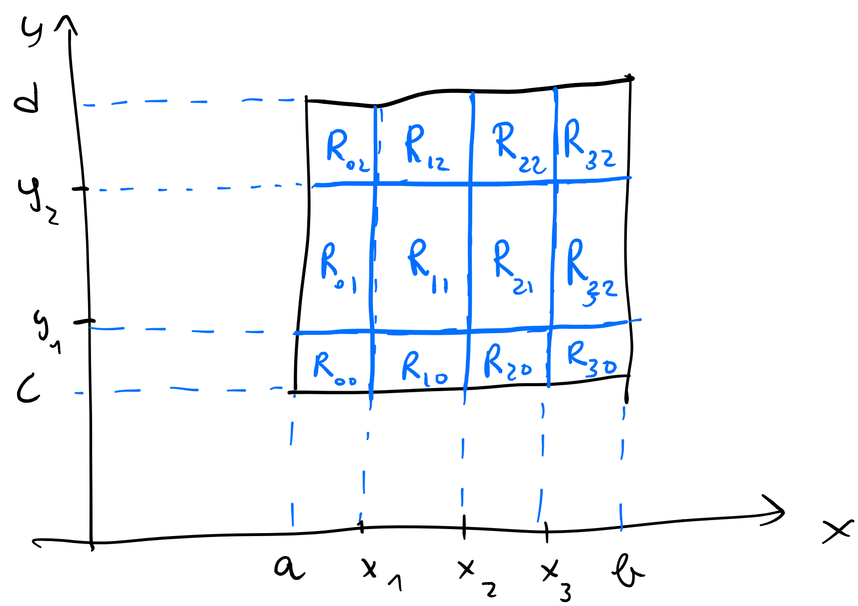
In dimensione 2

Cominciamo a dare alcune definizioni. In primo luogo, un *rettangolo* è il prodotto cartesiano di due intervalli $[a, b) \times [c, d)$, cioè l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ che hanno la prima coordinata x in $[a, b)$ e la seconda in $[c, d)$:[2]

$$R = [a, b) \times [c, d) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leqslant x < b,\ c \leqslant y < d\}.$$

Partizione

Operiamo ora una suddivisione di $[a, b)$ in n sottointervalli mediante i punti $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, e una suddivisione di $[c, d)$ in m sottointervalli mediante i punti $y_0 = c, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m = d$. Posto $I_h = [x_{h-1}, x_h)$ e $J_k = [y_{k-1}, y_k)$, il rettangolo R verrà suddiviso in $n \times m$ rettangolini $R_{hk} = I_h \times J_k$.



l'area del rettangolo R_{iJ}

si indica con

$$|R_{iJ}| := (x_i - x_{i-1})(y_J - y_{J-1}) > 0$$

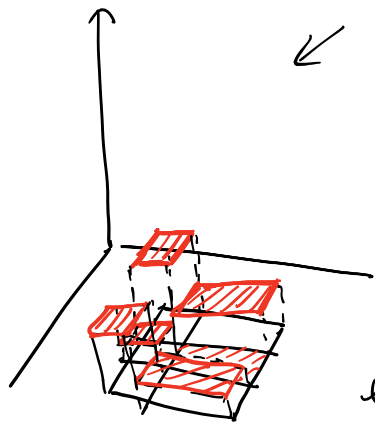
DEF. (FUNZIONE semplice)

Una funzione semplice è una funzione che assume un valore costante su ognuno di questi rettangolini, e che vale 0 fuori di R. Se indichiamo con λ_{hk} il valore che φ assume in R_{hk}, avremo

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk} \varphi_{R_{hk}}(x)$$

dove con $\varphi_{R_{hk}}$ si è indicata la funzione caratteristica di R_{hk}.

~~Per queste funzioni si definisce l'integrale.~~



una funzione semplice

la regione sotto al grafico è fatta di

PARALLELEPIPEDI

base R_{IJ} altezza λ_{IJ}

dove con $\chi_{R_{hk}}$ si è indicata la funzione caratteristica di R_{hk}.

Per queste funzioni si definisce l'integrale:

$$\int \varphi\, dx dy = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk}\, \mathrm{m}(R_{hk}) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk}\, \mathrm{m}(I_h)\, \mathrm{m}(J_k) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk}\, (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1}).$$

λ_{hk} è l'altezza del parallelepipedo

di base R_{IJ} quindi

$\lambda_{hk}(x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})$ è il VOLUME

del singolo parallelep.

Questa definizione

si può dare in qualsiasi dimensione

Definizione 12.2 *Diremo che una funzione f, limitata e nulla fuori di un compatto, è integrabile (secondo Riemann) se*

$$\sup_{\psi\in\mathcal{S}^-}\int\psi\,dxdy=\inf_{\varphi\in\mathcal{S}^+}\int\varphi\,dxdy. \qquad [12.1]$$

In questo caso, il valore comune si chiama *integrale* della funzione f e si indica con

$$\int f(x,y)dxdy \quad \text{o più in generale con} \quad \int f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Una definizione del tutto simile, con le ovvie modifiche del caso, vale nel caso di n variabili.

Osservazione 12.1 A volte le due quantità che compaiono a destra e a sinistra nella [12.1] si chiamano rispettivamente *integrale superiore* e *integrale inferiore* della funzione f:

$$\int^{*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\inf_{\varphi\in\mathcal{S}^+}\int\varphi\,d\mathbf{x}$$

$$\int_{*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\sup_{\psi\in\mathcal{S}^-}\int\psi\,d\mathbf{x}$$

Una funzione f, limitata e con supporto compatto, sarà dunque integrabile se l'integrale superiore è uguale all'integrale inferiore, cioè se risulta

$$\int_{*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int^{*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$ □

N.B. data una funzione limitata A SUPPORTO COMPATTO S sia R un rettangolo che contiene S $(S\subseteq R)$ consideriamo una partizione di R in rettangoli $\{R_{ij}\}_{i=1,\dots,n\,,\;j=1,\dots,m}$

Posso definire una funzione semplice minorante ponendo

$$s(x,y) = \left\{ \inf_{(x_1,y_1)\in R_{ij}} f(x_1,y_1) \quad \text{se } (x_1,y_1) \in R_{ij} \right.$$

N.B. s è costante sul rettangolo R_{ij}

ora $$\int s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \inf_{R_{ij}} (f)\, |R_{ij}| =$$

$$\sum_{ij} \inf (f)\, (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

(si tratta di una somma inferiore)

Posso definire una funzione semplice maggiorante ponendo

$$S(x,y) = \left\{ \sup_{(x_1,y_1)\in R_{ij}} \left(f(x_1,y_1)\right) \quad \text{se } (x,y) \in R_{ij} \right.$$

ove $$\int S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sup_{R_{ij}}(f)\, |R_{ij}| =$$

$$\sum_{ij} \sup_{R_{ij}}(f)\, (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

avremo che

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f, limitata e nulla fuori di un compatto, sia integrabile, è che per ogni $\varepsilon > 0$ *esistano una funzione semplice maggiorante* φ *e una minorante* ψ *tali che*

$$\int \varphi\, dxdy - \int \psi\, dxdy < \varepsilon.$$

AFFERMAZIONE (*)
in particolare $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ una partizione di R $\{R_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

tale che

$$\int S\, dxdy - \int s\, dxdy < \varepsilon$$

(dove S e s sono le funzioni semplici superiore ed inferiore <u>definite sopra</u>)

[Questa affermazione VA DIMOSTRATA]
vedi fine NOTA

Misura di Peano - Jordan

Definizione 12.3 *Un insieme limitato E si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se la sua funzione caratteristica φ_E è integrabile. In questo caso definiamo* misura *di E il numero*

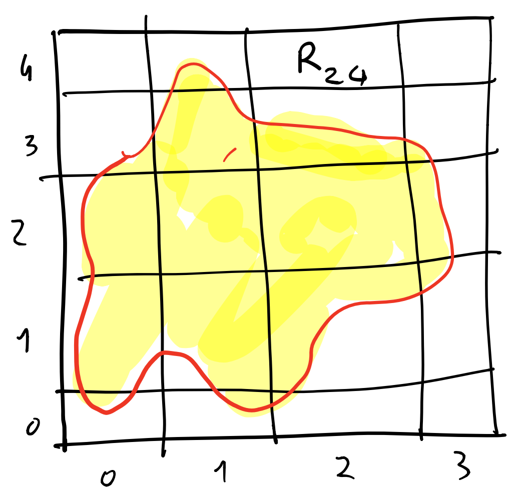
$$m(E) = \int \varphi_E \, d\mathbf{x}.$$

Quindi per def. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$

due funzioni semplici ψ e φ, con $\psi \leqslant \varphi_E \leqslant \varphi$, tali che

$$\int \varphi \, d\mathbf{x} - \int \psi \, d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

scegliamo SEMPRE funzioni costruite come sopra (usando l'inf o il sup in ciascun rettangolo) di $\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$



$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \cap E \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \cap E = \emptyset \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \subseteq E \\ 0 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \nsubseteq E \end{cases}$$

Nell'esempio in questione:

$S(x) = 0$ su R_{24}

$s(x) = 0$

$S(x) = 1$ su R_{14} e così via

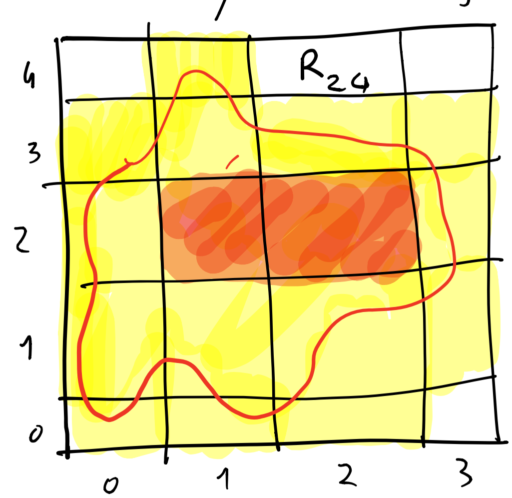
$s(x) = 0$

$S(x) = 1$ su R_{22}

$s(x) = 1$

in giallo $\int S$

in rosso $\int s$



$$\int S \, dx dy = \sum_{R_{ij} \cap E \neq 0} |R_{ij}|$$

$$\int s \, dx dy = \sum_{R_{ij} \subseteq E} |R_{ij}|$$

quindi $\int S \, dx dy - \int s \, dx dy = \sum_{\substack{R_{ij} \cap E \neq \emptyset \\ R_{ij} \not\subset E}} |R_{ij}|$

Così facendo, l'integrale di φ sarà la somma delle misure dei rettangoli R_{hk} che hanno punti in comune con E, mentre l'integrale di φ sarà la somma delle misure dei rettangoli R_{hk} contenuti in E. La differenza tra i due integrali sarà allora la somma delle misure dei rettangoli che hanno punti in comune con E ma non sono contenuti in E, cioè dei rettangoli che hanno punti in comune con la frontiera di E.

Chiamiamo ora *plurirettangolo* l'unione P di un numero finito di rettangoli R_i senza punti comuni; e misura di P la somma delle misure dei rettangoli che lo compongono. Avremo allora:

Proposizione 12.1 *Un insieme limitato E è misurabile se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono un plurirettangolo P contenuto in E e un plurirettangolo Q che contiene E, tali che* $\mathrm{m}(Q) - \mathrm{m}(P) < \varepsilon$.

Se E è misurabile, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(E) &= \inf\{\mathrm{m}(Q),\ Q \text{ plurirettangolo},\ Q \supset E\} = \\ &= \sup\{\mathrm{m}(P),\ P \text{ plurirettangolo},\ P \subset E\}. \end{aligned}$$

~~cedente~~ si può dunque concludere che

un insieme E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste un plurirettangolo Z che contiene la frontiera* ∂E, *con* $\mathrm{m}(Z) < \varepsilon$,

e dunque che

un insieme E è misurabile (secondo Peano-Jordan) se e solo se la sua frontiera ∂E *ha misura nulla.*

Dimostrare per esercizio. Notare che

$$\int S\,dx\,dy - \int s\,dx\,dy = \sum_{R_{ij} \cap E \neq \emptyset} |R_{ij}|$$

$$\nearrow \quad R_{ij} \not\subseteq E$$

area di un plurirettangolo che contiene la frontiera!

— . — . — . —

Dim. dell'affermazione $\circledast$:

Se f è integrabile allora

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \varphi \leq f \leq \psi$ tali che

$$\int \psi - \int \varphi < \varepsilon .$$

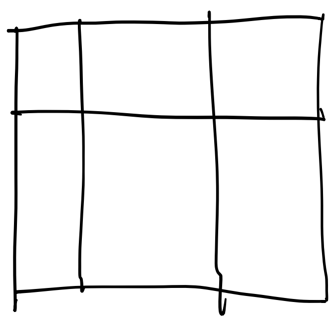
ψ è una funzione semplice maggiorante con supporto $\subseteq$ in un rettangolo $R^{(1)}$. costante in una partizione a tratti $\{R^{(1)}_{ij}\}$

φ è una funzione semplice minorante con supporto $\subseteq R^{(2)} \subseteq R^2$

costante a tratti su una partizione $\{R^{(2)}_{hk}\}$. Posso estrarre un

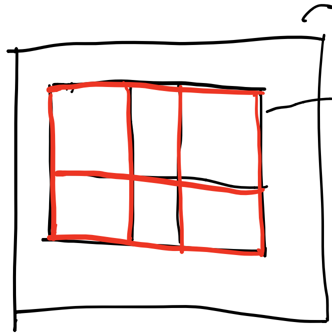
RAFFINAMENTO COMUNE delle due partizioni

$R_1 = \bigcup R^1_{ij}$ che definisce ψ



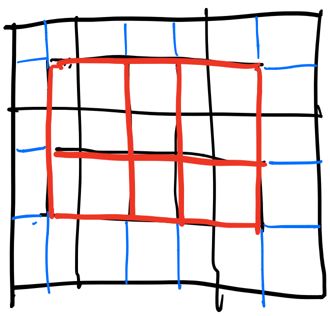
$$\psi(x,y) = \sum \lambda_{iJ}\, \varphi_{R^{(1)}_{iJ}}(x,y)$$

$\to R^{(1)}$ contiene $R^{(2)}$



$R^{(2)} = \bigcup R^{(2)}_{hk}$ che definisce la funzione semplice φ

$$\varphi(x,y) = \sum \mu_{hk}\, \varphi_{R^{(2)}_{hk}}(x,y).$$



$\to$ una partizione $R^{(1)} = \bigcup \widetilde{R}_{sr}$

che da un raffinamento comune di $\{R^{(1)}_{ij}\}_{ij}$ e $\{R^{(2)}_{hk}\}$

Ciascun rettangolo $R^{(1)}_{ij}$ è unione finita di $\widetilde{R}_{sr}$

stesso per $R^{(2)}_{hk}$

quindi

$$\psi(x,y) = \sum_{s,r} \tilde{\lambda}_{s,r} \, \varphi_{\widetilde{R}_{sr}}(x,y)$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{s,r} \tilde{\mu}_{s,r} \, \varphi_{\widetilde{R}_{sr}}(x,y)$$

dove $\tilde{\lambda}_{s,r} = \lambda_{ij}$ se $\widetilde{R}_{s,r} \subseteq R^{(1)}_{ij}$

$\tilde{\mu}_{sr} = \mu_{hk}$ se $\widetilde{R}_{s,r} \subseteq R^{(2)}_{hk}$

ora dato che $\psi \geq f$ sappiamo che

$$\tilde{\lambda}_{sr} \geq \sup_{(x',y') \in \tilde{R}_{sr}} f(x',y')$$

allo stesso modo $\tilde{\mu}_{sr} \leq \inf_{(x',y') \in \tilde{R}_{sr}} f(x',y')$

quindi per costruzione

se definisco

$$S(x,y) = \begin{cases} \sup_{(x',y') \in \tilde{R}_{sr}} f(x',y') & \text{per } (x,y) \in \tilde{R}_{sr} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$s(x,y) = \begin{cases} \inf_{(x',y') \in \tilde{R}_{sr}} f(x',y') & \text{per } (x,y) \in \tilde{R}_{sr} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int \psi(x,y)\, dx\, dy \geq \int S(x,y)\, dx\, dy$$

$$\int s(x,y)\,dx\,dy \geq \int \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

ma per ipotesi

$$\int \psi(x,y)\,dx\,dy - \int \varphi(x,y)\,dx\,dy < \varepsilon$$

e quindi anche

$$\int S(x,y)\,dx\,dy - \int s(x,y)\,dx\,dy \leq$$

$$\leq \int \psi(x,y)\,dx\,dy - \int \varphi(x,y)\,dx\,dy \leq \varepsilon$$

$\blacksquare$