Cambi di coordinate (vedi testo sul libro)

Supponiamo per sempli. che valga Fubini (sia risp. a x che y)

$$* = \int f(x,y)\, dx\,dy = \int dx \left(\int f(x,y)\, dy \right)$$

$$\forall x \quad \exists$$

$$v = \varphi^{-1}(y,x) \qquad y = \varphi(v,x)$$

[mappa 1 a 1 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$]

$$dy = \varphi_v(v,x)\, dv \leftarrow (\text{se } \varphi_v(v,x) > 0)$$

$$* = \int dx \int f(\varphi(v,x))\, \varphi_v(v,x)\, dv =$$

(applico Fubini ma facendo prima dx poi dv.

$$\int dv \int f(\varphi(u,x))\, \varphi_v(v,x)\, dx \qquad (\mathbf{hp.}\ x_u(u,v) > 0)$$

$$x = x(u,v) \qquad dx = x_u(u,v)\, du$$

$$= \int du \int f(g(v, x(u,v))\, \varphi_v(v, x(u,v))\, x_u(u,v)\, dv$$

$$= \int f(\varphi(v, x(u,v))\, \varphi_v(v, x(u,v))\, x_u(u,v)\, du\, dv$$

il cambiamento che ho applicato è

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = \varphi(v, x(u,v)) = y(u,v) \end{cases}$$

$(u,v) \xrightarrow{\psi} (x,y)$ $\quad J\psi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$

$$y_v = \varphi_v + \varphi_x x_v \ ; \ y_u = \varphi_x x_u$$

$$\det(J\psi) = x_u y_v - x_v y_u =$$

$$x_u(\varphi_v + \varphi_x x_v) - x_v \varphi_x x_u = x_u \varphi_v \ !$$

(sostituisco ottengo la formula

$$\int dx\, dy\ f(x,y) = \int du\, dv\ |\det(J\psi)|\, f(\psi(u,v))$$

ora se f è a supporto compatto

$\mathrm{supp} f \subseteq R_0$ (un rettangolo).

Consideriamo una mappa C^1

$$\psi : (u,v) \to \psi(u,v) = x(u,v), y(u,v))$$

definita $A \to \psi(A)$ iniettiva.

A aperto di $\mathbb{R}^2$

e tale che $\det(\nabla f(u,v)) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in A$.

① Per il teorema della funzione inversa.

ψ è invertibile (localmente e x iniettività su tutto A)

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

$x_u y_v - x_v y_u \neq 0$

$\forall (u,v)$ sicuramente se $x_u = 0$ allora $x_v \neq 0$ e $y_u \neq 0$

(Viceversa se $x_v = 0$ allora $x_u, y_v \neq 0$)

se $R \subset A$ un rettangolo chiuso

t.c. $R_0 \subseteq \psi(R)$ dato che R è un compatto posso dividerlo in

RETTANGOLI $R = \bigcup R_{ij}$ in modo che in ciascun rettangolo $x_u(u,v) \neq 0 \quad \forall u,v \in R_{ij}$

(oppure $x_v(u,v) \neq 0 \quad \forall u,v \in R_{ij}$)
$y_u(u,v) \neq 0$

$u = \gamma(x,v)$ [inverto $x = x(u,v)$ rispetto a u]

[

$\hookrightarrow \quad y = \varphi(x,v) := y(\gamma(x,v),v)$

quindi posso riscrivere ψ

come

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = \varphi(x,v) \end{cases}$$ e fare come prima

per applicare la dimostrazione di prima mi serve $\varphi_v(x,v) \neq 0$

ma $\varphi_v(x,v) = y_u \cdot \gamma_v + y_v$

dal Teor. funz. inversa

$x(\gamma(x,v),v) = u \Rightarrow x_u \gamma_v + x_v = 0 \Rightarrow$

$\gamma_v = -\frac{x_v}{x_u} \leftarrow$ questo $\neq 0$ per hp.

quindi $\varphi_v = \frac{y_u x_v - y_v x_u}{x_u} \neq 0$

(il numeratore è $\det J\psi$)

Se l'integrale è fatto su un dominio E

$$\int_E f \, dx\,dy = \int f(x,y)\, \varphi_E(x,y)\, dx\,dy =$$

funzione caratteristica

$$= \int f(x(u,v), y(u,v))\, \varphi_E(x(u,v), y(u,v))\, |\det J\psi|\, du\,dv$$

questa è la funzione caratteristica di $\psi^{-1}(E)$!

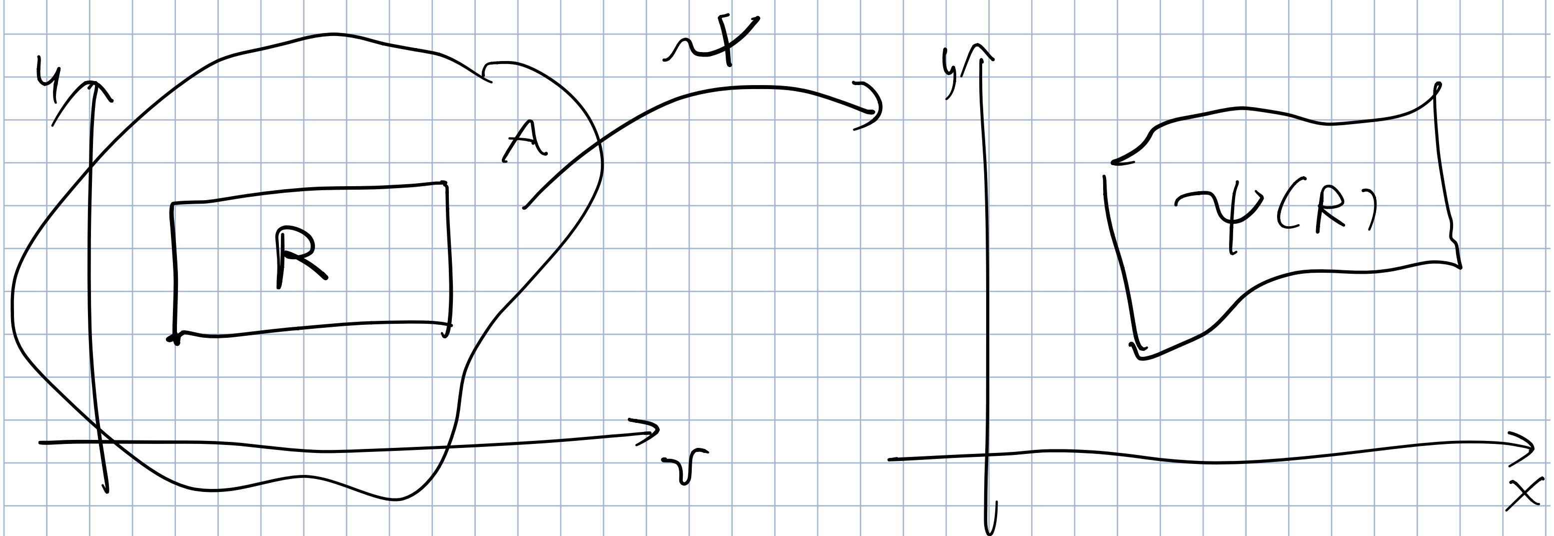
$$= \int_{\psi^{-1}(E)} f(x(u,v), y(u,v))\, |\det J\psi|\, du\,dv .$$

Visione + intuitiva

immaginiamo $\psi : A \to \psi(A)$

iniettiva C^1 e $\det J\psi \neq 0$ in A

(quindi invertibile con inversa C^1)



Vogliamo calcolare $\displaystyle\int_{\psi(R)} f(x,y)\, dx\, dy$

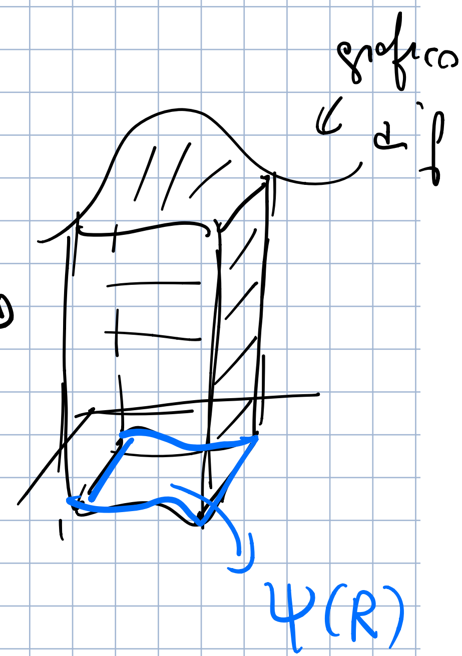
è conveniente passare alle u, v perché

in queste variabili il DOMINIO di INTEGRAZ

è più facile!

(supponiamo $f \geq 0$ per facilitare i disegni)

$$\int_{\Psi(R)} f(x,y)\,dx\,dy = \text{Volume}$$



se divido R in rettangoli (molto piccoli)

$$R = \bigcup R_{ij} \qquad \Psi(R) = \bigcup \Psi(R_{ij})$$

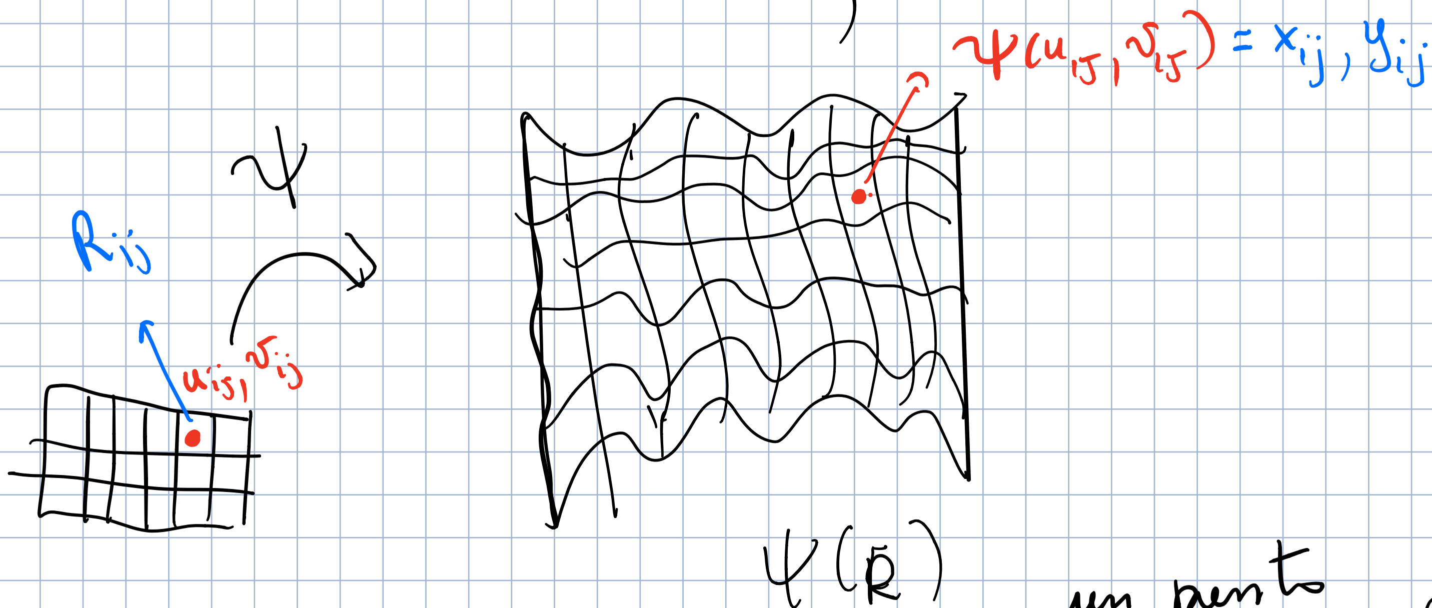
e $\Psi(R_{ij})$ è contenuto in una palla di raggio δ (arbitrariamente piccolo pur di usare una partizione abbastanza fine x R)

quindi (dato che f è integrabile)

$$\int_{\Psi(R)} f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{ij} f(x_{ij}, y_{ij})\, |\Psi(R_{ij})|$$

a meno di un errore arbitrar. piccolo

dove (x_{ij}, y_{ij}) è un punto ARBITRARIO di $\psi(R_{ij})$ $(x_{ij}, y_{ij}) = \psi(u_{ij}, v_{ij})$



un punto del rettangolo

$$\int_{\psi(R)} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\delta \to 0} \sum_{ij} f(x_{ij}, y_{ij})\,|\psi(R_{ij})| =$$

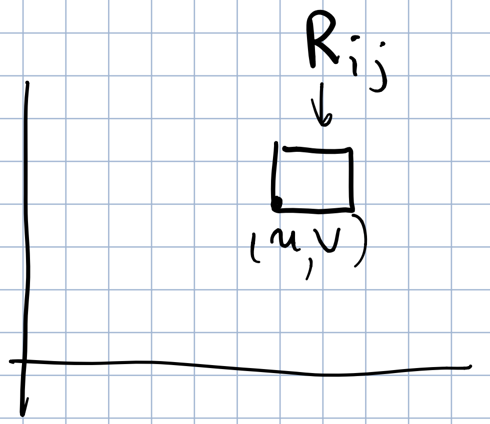
$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{ij} f(\psi(u_{ij}, v_{ij}))\,\frac{|\psi(R_{ij})|}{|R_{ij}|}\,|R_{ij}| =$$

λ è il fattore di scala

$$\int_R f(x(u,v), y(u,v))\,\lambda(u,v)\,du\,dv$$

Tutto sta nel calcolare il fattore di deformazione dell'area!

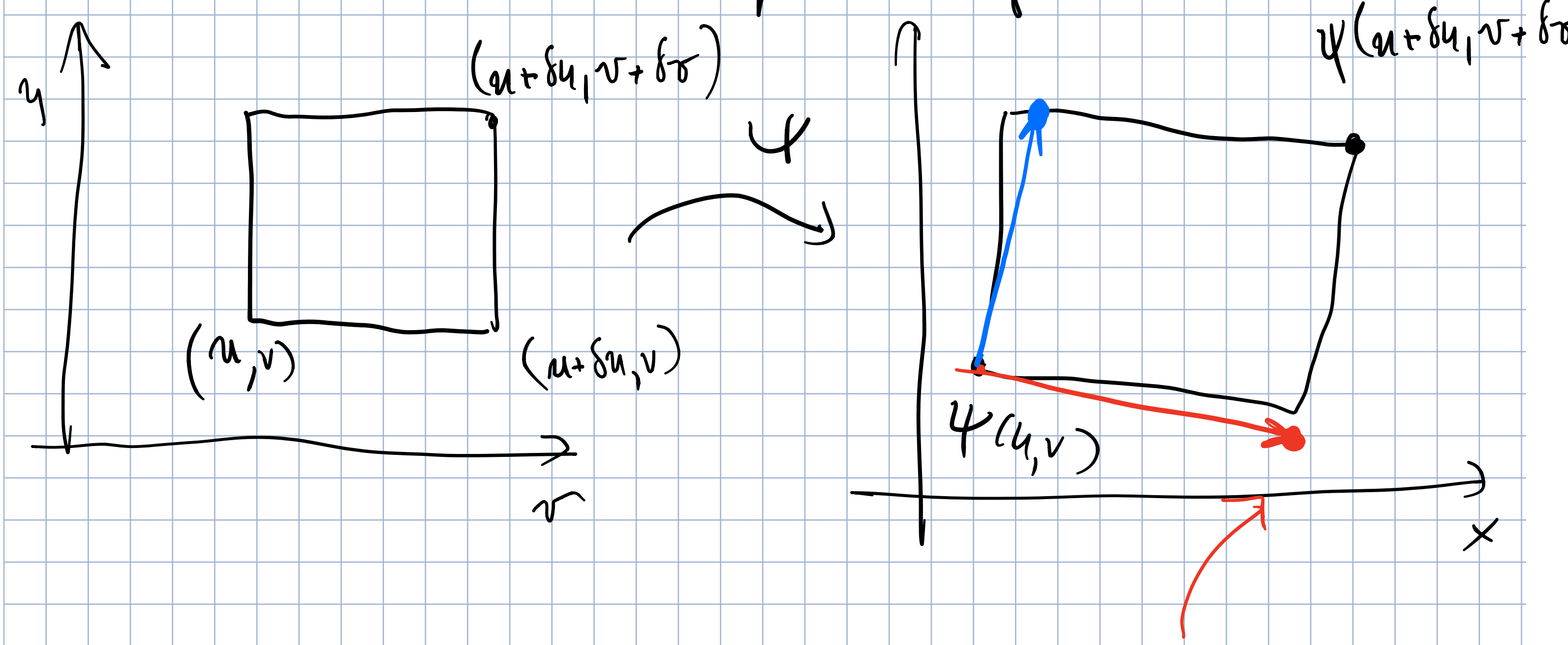
Fissiamo un rettangolino R_{ij} e chiamiamo



1 vertice (u,v)

e gli incrementi δu, δv

Ora dato che ψ è C^1 è ragionevole approssimarla con la sua Jacobiana per calcolare la variazione dell'area. Per capire supponiamo



$$\psi(u+\delta u, v) = \boxed{\psi(u,v) + \psi_u(u,v)\,\delta u} + o(|\delta u|)$$

è il punto segnato in ROSSO

$$\psi(u, v+\delta v) = \boxed{\psi(u,v) + \psi_v(u,v)\,\delta v} + o(|\delta v|)$$

(segnato in blu)

Approssimo l'area di $\psi(R_{ij})$ con l'area del parallelogramma generato dai due vettori tangenti.

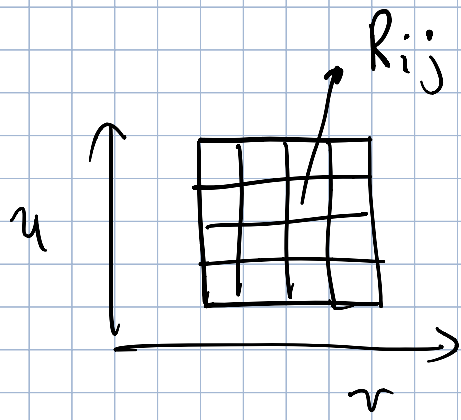
LEMMA l'area è $|\psi_u \wedge \psi_v|\, \delta u\, \delta v =$

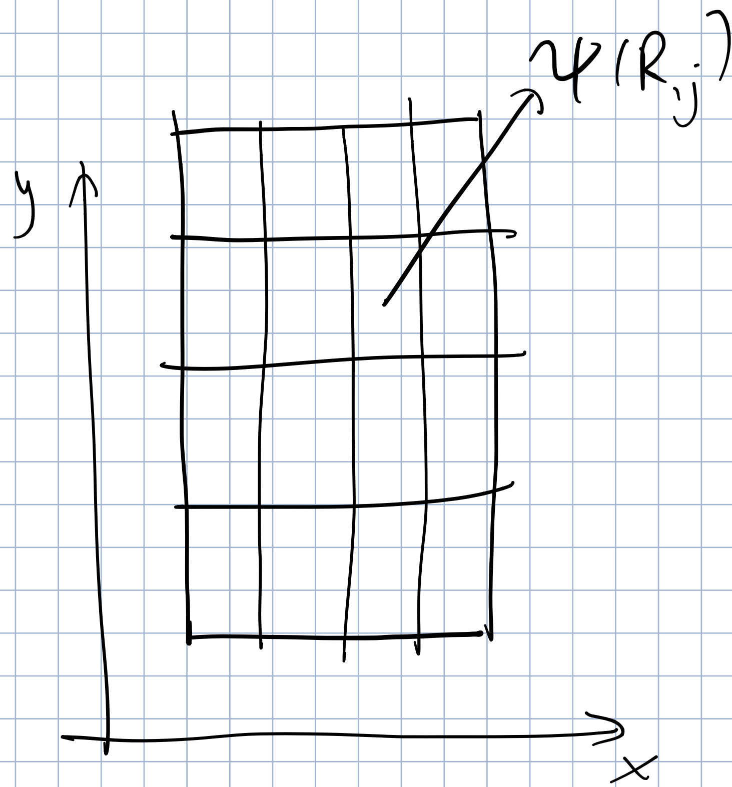
$$= |\det(J\psi)|\, \delta u\, \delta v$$

ora $\delta u\, \delta v = |R_{ij}|$ (area del rettangolo)

quindi il fattore di scala è il $|\det(J\psi)|$.

Esempi:



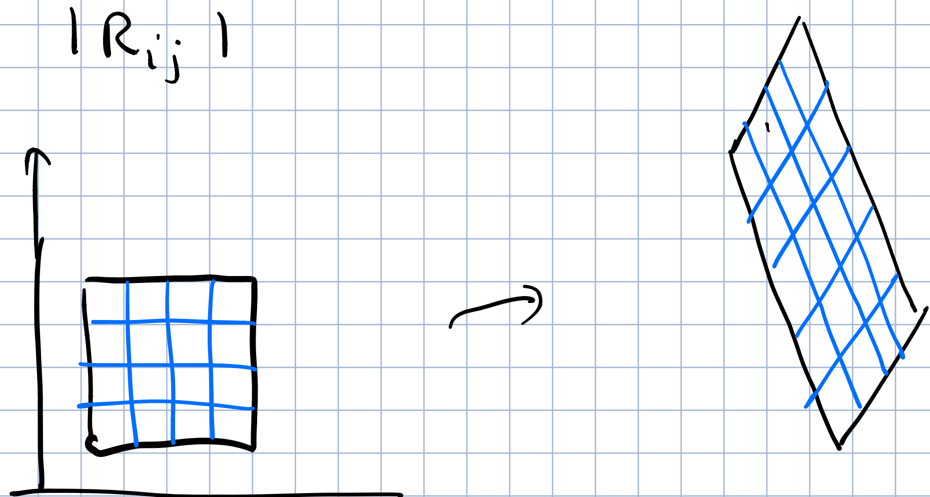


$x = 2u$

$y = 3v$

il rapporto fra le aree

$$\frac{|\psi(R_{ij})|}{|R_{ij}|} = 3 \cdot 2 = 6$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad A \in GL(2)$$