Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad C^2(A)$ $\quad A \in \mathbb{R}^n$

un aperto.

$H = Hf(x_0)$ è la matrice $n \times n$

simmetrica definita da

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Formula di Taylor al II°

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot H(x - x_0)$$

$$+ o(|x - x_0|^2).$$

[REM $f(x)$ è $C^2(A, \mathbb{R})$ $\quad x_0 \in A$]

$$F(t) = f\left(x_0 + t\frac{(x - x_0)}{|x - x_0|}\right)$$ è una funzione $C^2([0,1], \mathbb{R})$

$F(0) = f(x_0)$; $F(|x - x_0|) = f(x)$

$$F'(t) = \nabla f\left(x_0 + t\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}\right) \cdot \frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}$$

$$F''(t) = \frac{d}{dt} F'(t) = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0 + t\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}\right)\right)\frac{(x_i - x_{0i})}{|x-x_0|}$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_0 + t\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}\right)\frac{(x_j - x_{0j})(x_i - x_{0i})}{|x-x_0|^2}$$

$$= \frac{(x-x_0)}{|x-x_0|} \cdot Hf\left(x_0 + t\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}\right)\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}$$

questo è il punto in cui viene calcolato H

Applico la formula di Taylor

in dimensione 1

$$F(|x-x_0|) = F(0) + F'(0)|x-x_0| + \frac{1}{2}F''(0)|x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2)$$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)\cdot Hf(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|^2)$$

2.

Altri tipi di resto si fanno uguale!

Max - Min e punti critici.

DEF: x_0 è un punto critico per f (funzione differenziabile) se

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Rem: x_0 è un punto di massimo (resp. minimo) per $f(x)$ se $\exists\, B_\delta(x_0)$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B_\delta(x_0)$

(max stretto se $f(x) = f(x_0) \Rightarrow x = x_0$)

LEMMA se f è differenziabile in x_0 punto di massimo $\Rightarrow$

$\nabla f(x_0) = 0$.

<u>DIM.</u> se $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

per ogni direzione $\hat{v}$ e per t sufficientem.

piccoli $f(x_0 + t\hat{v}) \leq f(x_0)$ | pongo $F(t) = f(x_0 + t\hat{v})$

quindi $F(t) \leq F(0) \quad \forall |t| \leq t_0$

dato che $F(t)$ è una funzione

derivabile con un MAX in $t = 0$

$F'(0) = 0 \Leftrightarrow F'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \hat{v} = 0$

dato che $\hat{v}$ è arbitrario deve

essere $\nabla f(x_0) = 0$. ∎

Matrici definite positive.

$M \in Mat(n \times n)$ è def. positiva

⇔ (1) $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad v \cdot Mv = \sum_i \sum_j M_{ij} v_i v_j \geq 0$

e ② $v \cdot Mv = 0 \iff v = 0$

semi-definita se vale solo ①.

$M \in mat(n \times n)$ è definita NEGATIVA

se $-M$ è positiva.

M è indefinita se non è

NÉ positiva NÉ negativa.

<u>Teorema</u> Data $f \in C^2(A, \mathbb{R}^n)$ e sia

$x_0 \in A$ ~~è~~ un punto critico $(\nabla f(x_0) = 0)$

① Se $Hf(x_0)$ è POSITIVA allora

x_0 è un punto di MINIMO locale

② Se $Hf(x_0)$ è NEGATIVA allora

x_0 è un punto di MASSIMO local

x_0 è un punto ...

(3) Se $Hf(x_0)$ è INDEFINITA allora

x_0 è una sella.

(4) Se $Hf(x_0) \neq 0$ è semidefinita POSITIVA

so solo che NON è un MASSIMO.

DIM.

ho bisogno del seguente LEMMA

LEM. se M è POSITIVA allora

esiste $\lambda > 0$ t.c. $v \cdot Mv \geq \lambda |v|^2$

DIM. del LEMMA: la funzione $F: x \to x \cdot Mx$

è continua su $\mathbb{R}^n$. quindi $F(x)$

ha massimo e minimo su S^{n-1}

(la sfera unitaria) sia $\hat{v}_{MIN}$

un vettore che realizza il minimo

$$F(\hat{v}) \geq F(\hat{v}_{MIN}) = \hat{v}_{MIN} \cdot M \hat{v}_{MIN} > 0$$

(dato che M è POSITIVA)

ponendo $\lambda = F(\hat{v}_{MIN})$ ho

$F(\hat{v}) \geq \lambda$ ma dato che $F(x)$

è omogenea di grado $\alpha = 2$

$$F(x) = F\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right) = |x|^2 F\left(\frac{x}{|x|}\right) \geq \lambda |x|^2$$

$\blacksquare$

DIM. del teorema.

Uso la formula di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{= 0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot Hf\,(x - x_0)$$

$$+\, o(|x - x_0|^2)$$

ora uso il LEMMA per dire

$$(x - x_0) \cdot Hf\,(x - x_0) \geq \lambda |x - x_0|^2$$

... di $o(|\cdot|)$

allo stesso modo (x definizione di ...)

se $|x-x_0|<<1$ si ha

$$-\frac{\lambda}{2}|x-x_0|^2 \le o(|x-x_0|) \le \frac{\lambda}{2}|x-x_0|^2$$

quindi se $x \neq x_0$

$$f(x) \ge f(x_0) + \lambda|x-x_0|^2 - \frac{\lambda}{2}|x-x_0|^2 > f(x_0)$$

quindi x è un punto di MAX stretto

Per il punto di minimo è lo stesso.

Se H è INDEFINITA vuol dire che esiste v_1 t.c. $v_1 \cdot H v_1 > 0$

e v_2 t.c. $v_2 \cdot H v_2 < 0$

$$x_1 = x_0 + v_1 t$$

$$\ldots\ t^2\, v \cdot H v + o(t^2|v_1|^2)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{\quad}{2} v_1 \cdot H v_1 \ldots$$

$$|o(t^2)|\,|v_1|^2 \leq \frac{t^2}{4}\left(v_1 \cdot H v_1\right)$$ (per la def. di $o(t^2)$ se t è piccolo)

quindi

$$f(x_1) \geq f(x_0) + \frac{t^2}{4} v_1 \cdot H v_1 > f(x_0)$$

d'altro canto

$$f(x_2) = f(x_0) - \frac{t^2}{2} |v_2 \cdot H v_2| + o(t^2 |v_2|^2)$$

di nuovo $\quad |o(t^2)|\,|v_2|^2 \leq \frac{t^2}{4} |v_2 \cdot H v_2|$

quindi

$$f(x_2) \leq f(x_0) - \frac{t^2}{4} |v_2 \cdot H v_2| < f(x_0)$$

x_0 NON è né di MAX né di MIN. $\blacksquare$

Se $Hf(x_0)$ è SEMIDEFINITA (positiva)

esiste v_1 t.c.

e NON è -0

$v_1 \cdot H v_1 > 0$. Facendo come nel caso precedente $x_1 = x_0 + t v_1$

$f(x_1) > f(x_0)$ quindi x_0 NON è un max.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + y^4$$

$$Hf(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

evidentemente $f(x,y) \geq 0$ e $f(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

quindi $(0,0)$ è un punto di MINIMO STRETTO.

D'altro conto $f(x) = \frac{x^2}{2} - y^4$

$Hf(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ma $(0,0)$ è una SELLA (in ogni intorno di $(0,0)$

ci sono sia punti (x_1,y_1): $f(x_1,y_1) > f(0,0)$

che punti (x_2,y_2): $f(x_2,y_2) < f(0,0)$

infatti $f(x,0) > 0 \quad \forall x \neq 0$ e

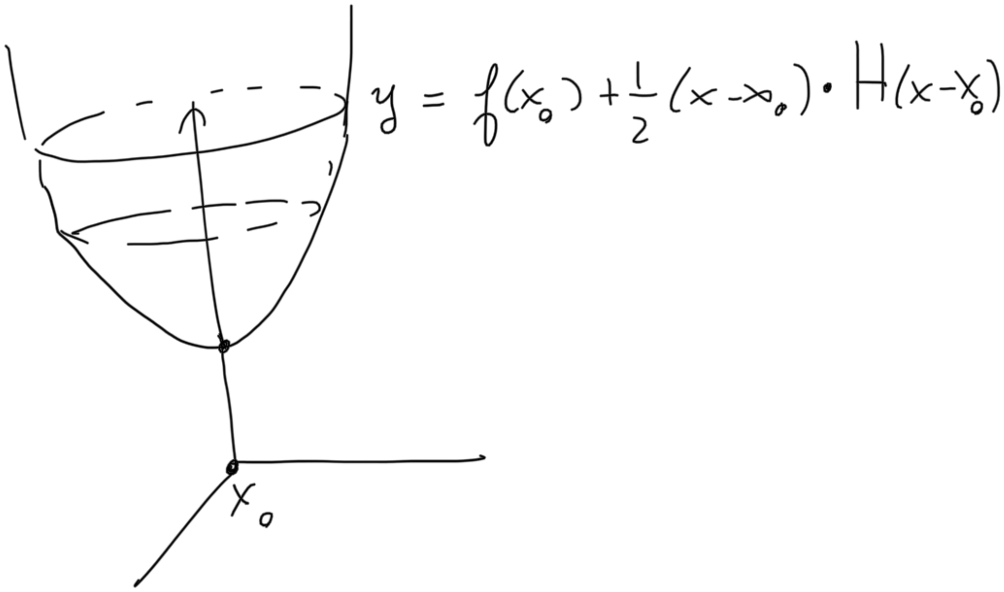
$f(0,y) < 0 \quad \forall y \neq 0$.

Graficamente

(A) se $Hf(x_0)$ è POSITIVA

$$f(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)\cdot H(x-x_0)$$ ha

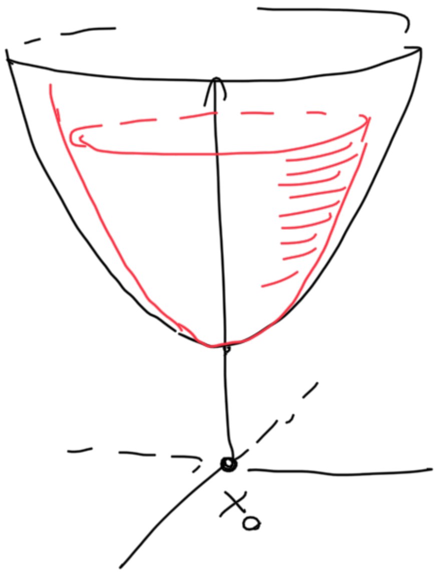
come grafico un paraboloide



Dato che $|o(|x-x_0|^2)| \le \varepsilon |x-x_0|$

(con ε arbitrariamente piccolo se $|x-x_0| \ll 1$)

se x è VICINO a x_0



$y = f(x)$

$y = f(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0) \cdot H(x-x_0)$

Come si verifica se H (simmetrica) è DEFINITA ?

Bisogna calcolare gli autovalori!

N.B. H è diagonalizzabile sui reali. Esiste una base ortonormale di autovettori $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$:

a autovettori

$H \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ (λ_i autovalori)

inoltre la matrice

O che diagonalizza H è

ortogonale $H = O^{-1} D O$

dove $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Dato che $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ formano UNA BASE

$\forall x$ scrivo (in modo UNICO) $x = \sum y_i \underline{v}_i$

$$x \cdot H x = \sum_{i=1}^{n} y_i \underline{v}_i \cdot H\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \underline{v}_j\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j \, \underline{v}_i \cdot H \underline{v}_j$$

ora per ipotesi $H \underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j$ e

$v_i \perp v_j$ quindi

$$x \cdot Hx = \sum \lambda_i y_i^2$$

DA CUI $H > 0$ sse $\lambda_i > 0 \ \forall i$

ALTRO MODO (equivalente)

$$H = O^T D O$$

$$x \cdot O^T D O x = Ox \cdot D O x$$

se indico $y = Ox$

$$x \cdot Hx = \sum \lambda_i y_i^2$$

- REM. per definizione $x = \sum x_i \underline{e}_i$

quindi uso un altro nome per le coordinate nella base $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$