

Grafico di $(x, y) \rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$

① Se $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ paraboloid
ellittico

$$z = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

l'intersezione con

un piano

orizzontale

$z = z_0$ è un'ellisse

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = z_0$$

(N.B. sono tutti ellissi SIMILI!)

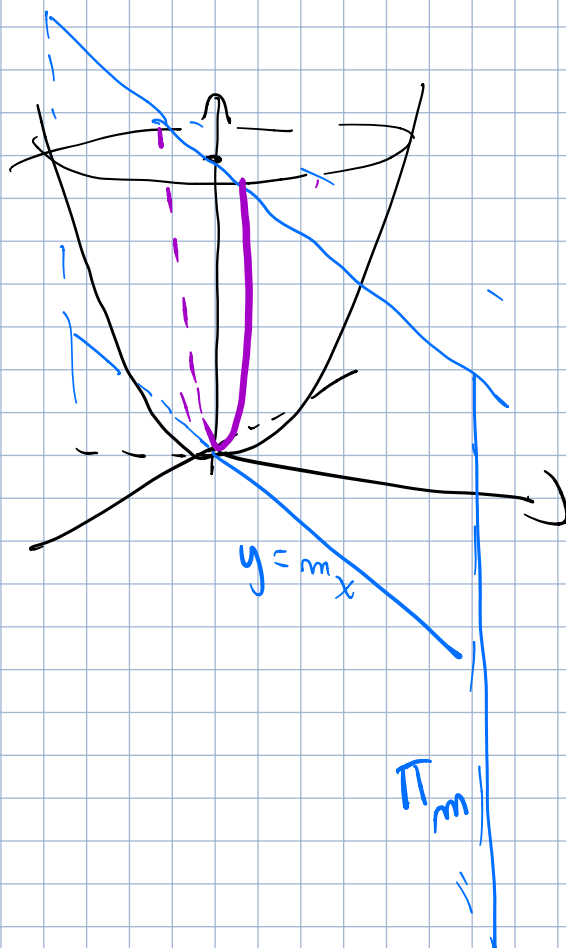
l'intersezione con un piano verticale
contenente l'asse $\hat{z}$ è UNA PARABOLA
verticale

$$\pi_m := \{(x, y, z) : y = mx\}$$

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) : z = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2\}$$

$$\mathcal{P} \cap \pi_m \left\{ (x, y, z) : y = mx \quad z = (\lambda_1 + m^2 \lambda_2) x^2 \right\}$$

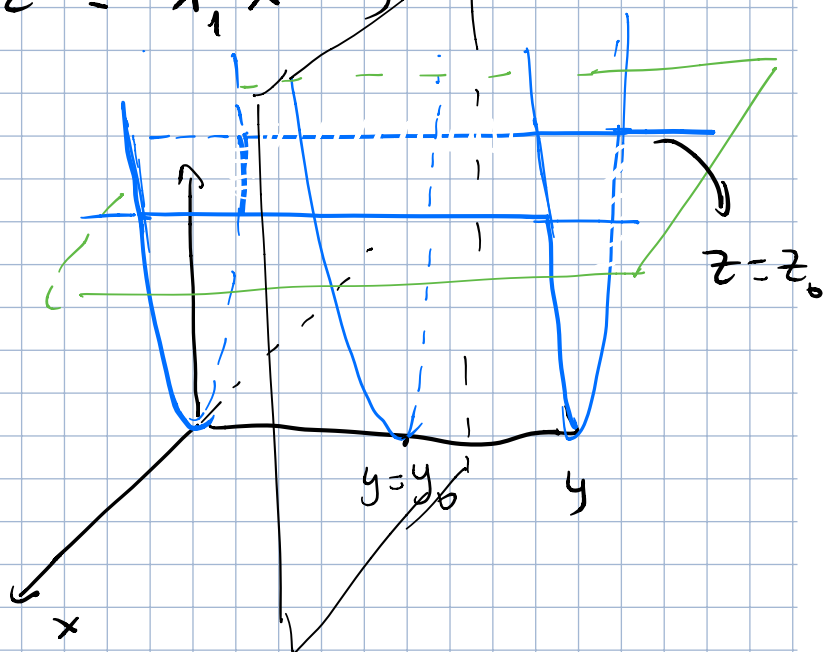
$\uparrow$
 NB $\bar{x} > 0$



$$\mathcal{P}_1 = \left\{ (x, y, z) : z = \lambda_1 x^2 \right\}$$

l'intersezione con
ogni piano $y = y_0$
è la parabola

$$z = \lambda_1 x^2$$



l'intersezione con il piano orizzontale

$z = z_0$ sono due rette $x = \pm \sqrt{\frac{z_0}{\lambda_1}}$
($z_0 > 0$)

Caso $\lambda_1 > 0 ; \lambda_2 < 0$

Esempio

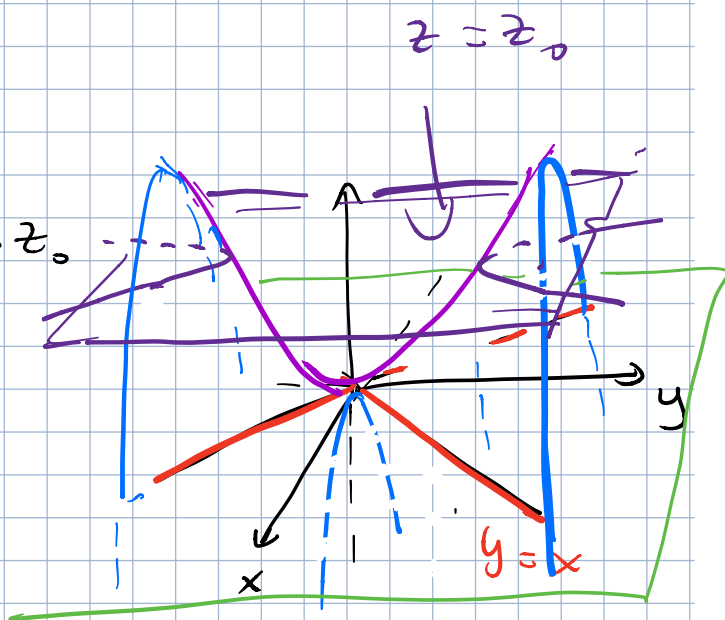
$$P = \{(x, y, z) : z = y^2 - x^2\}$$

l'intersezione con

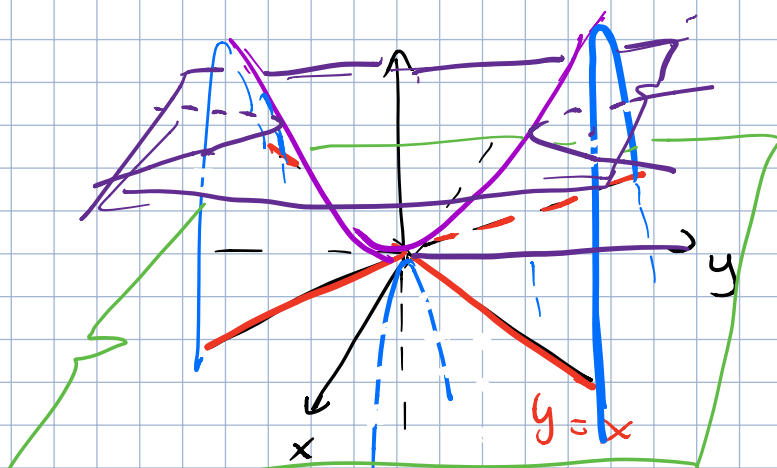
un piano orizzontale $z = z_0$

è una iperbole se $z_0 \neq 0$

$$y^2 - x^2 = z_0$$



Se $z_0 = 0$ ho DUE RETTE $x = y$ e $x = -y$



L'intersezione

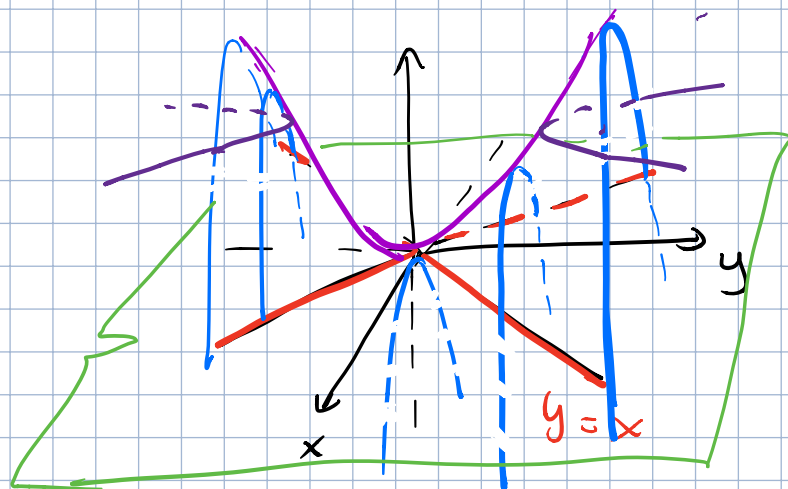
con il piano

$$y = y_0$$

è una

parabola

involta verso il basso



l'intersezione con $x = x_0$ è una parabola
involta verso l'alto (in viola si vede
solo una)

Questo è UNA SELLA

In generale se

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot M x \quad \text{dato che } M \text{ è}$$

simmetrica REALE allora esiste

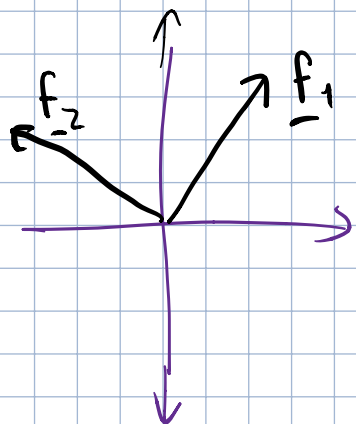
una matrice ortogonale che la
diagonalizza. esiste $O \in \text{Mat}(n \times n)$
tale che $O^T = O^{-1}$ e

$$O^T M O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_i \text{ REALI}$$

(punti M si diagonalizza sui reali
tramite una matrice ortogonale)

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot M \vec{v} &= \vec{v}^T M \vec{v} = \vec{v}^T O D O^T \vec{v} \\ &= (O^T \vec{v}) \cdot D O^T \vec{v} \end{aligned}$$

se chiama $w = O^T \vec{v}$ $\vec{v} \cdot M \vec{v} = w \cdot D w$



O è ortogonale
vuol dire che gli
AUTOVETTORI di M sono
perpendicolari fra loro

O ha come colonne gli autovettori (NORMALIZZATI)

Quindi se invece di usare come coordinate x_1, x_2 (coordinate relative alla base)
CANONICA di $\mathbb{R}^2$

uso le coordinate date da $\underline{f}_1, \underline{f}_2$

$$\vec{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 = y_1 \underline{f}_1 + y_2 \underline{f}_2$$

si verifica che $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

e quindi

$$\vec{x} \cdot M \vec{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

Quindi per sapere il segno qualitativo di $\vec{x} \cdot M \vec{x}$

BASTA CALCOLARE gli autovalori

(in realtà basta SAPERE IL SEGNO degli autovalori!)

Nota Bene per disegnare il grafico

di $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ abbiamo

principalmente intersecato

il grafico con ① piani orizzontali

$z = z_0$ ② Piani verticali

o passanti per l'asse $\hat{z}$ oppure

della forma $x = x_0$ o $y = y_0$

Può essere utile fare un disegno in

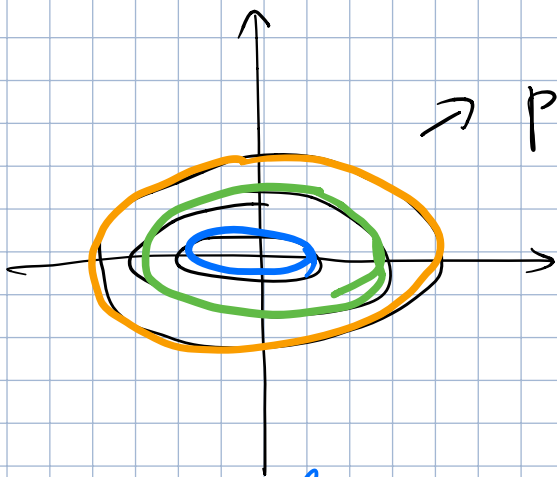
2 dimensioni segnando le

"curve di livello" così

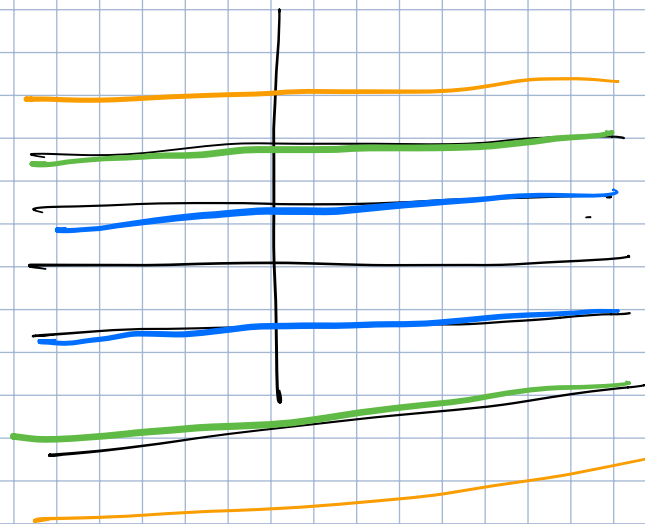
sul piano (x, y) traccia le "curve"

$$L_{z_0} := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = z_0 \}$$

→ paraboloide ellittico



blu sono le
stesse minori
etc...



Funzioni omogenee

Proposizione: sia $f: \mathbb{R}^n / \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

① Omogenea di grado $\alpha > 0$

② $\exists L \mid \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $|\hat{x}| = 1$ si ha
 $|f(\hat{x})| < L$

($|f|$ è limitata sulla sfera unitaria)

allora $\lim_{\vec{x} \rightarrow 0} f(\vec{x}) = 0$

Dimostrazione (teorema dei Corollari)

$$\vec{x} = |\vec{x}| \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad \text{e} \quad \hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad \text{è sulle}$$

sfere UNITARIA

$$f(\vec{x}) = f(|\vec{x}| \hat{x}) = |\vec{x}|^\alpha f(\hat{x})$$

quindi $0 \leq |f(\vec{x})| \leq |\vec{x}|^\alpha |f(\hat{x})| \leq |\vec{x}|^\alpha L$

$\downarrow$
0

COROLLARI:



Se f è omogenea di grado $\alpha < 0$

non si può estendere per continuità in $\vec{x} \rightarrow 0$

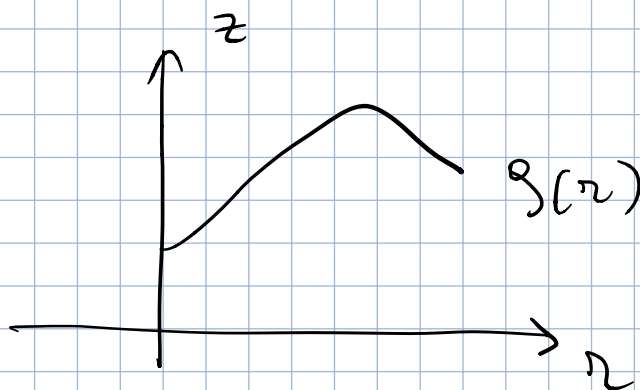
Se f è omogenea di grado $\alpha = 0$

si può estendere solo se è COSTANTE!

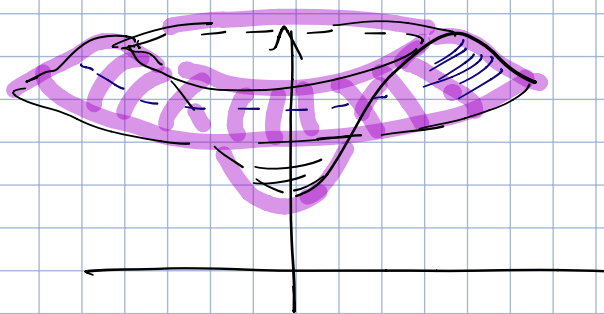
Funzioni radiali

$$f(\vec{x}) = g(|x|) \quad \text{dove}$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$



il grafico di f si ottiene ruotando
 g attorno all'asse $\hat{z}$



Le curve di livello sono

CIRCONFERENZE con centro $\hat{O}$