

Differenziabilità:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0

se $\exists L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione lineare

t.c.

$$f(x) = f(x_0) + L[x - x_0] + o(|x - x_0|)$$

cioè equiv. a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + L[x - x_0])}{|x - x_0|} = 0$$

il grafico

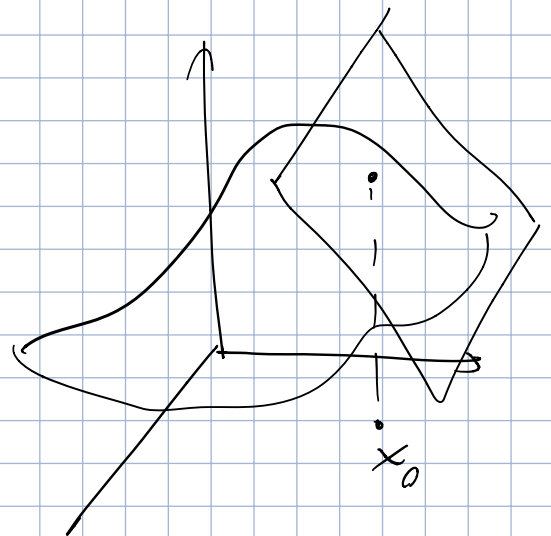
$$z = f(x)$$

vicino a x_0

si approssima con

il **PIANO AFFINE**

$$z = f(x_0) + L[x - x_0]$$



la funzione lineare L si dice il
DIFFERENZIALE e si indica con $df(x_0)$

$$L[h] = df(x_0)[h] = df_{x_0}[h]$$

Proposizione

Se f è differenziabile in x_0

① f è continua in x_0

② esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(x_0 + t e_i) \right|_{t=0}$$

e vale $L[e_i] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

quindi $df(x_0)[h] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i = \nabla f \cdot h$

③ Esistono tutte le derivate direzionali

$$\left. \frac{d}{dt} f(x_0 + t v) \right|_{t=0} = df(x_0)[v]$$

④ Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva
derivabile con $\varphi(0) = x_0$

$$\left. \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \right|_{t=0} = df_{(x_0)} [\varphi'(0)]$$

— . — . —

$$④ f(\varphi(t)) = f(x_0) + df_{(x_0)}[\varphi(t) - x_0] + o(|\varphi(t) - x_0|)$$

ora dato che φ è differenziabile

$$\varphi(t) = x_0 + \varphi'(0)t + o(|t|)$$

$$\text{quindi } |\varphi(t) - x_0| \sim |\varphi'(0)||t| \quad e$$

$$o(|\varphi(t) - x_0|) = o(|t|)$$

$$f(\varphi(t)) = f(x_0) + df_{(x_0)}[\varphi'(0)t + o(|t|)] + o(|t|)$$

$$\text{ma } \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} o_i(|t|) = o(|t|)$$

quindi in conclusione

$$f(\varphi(t)) = f(\vec{x}_0) + \left(df(\vec{x}_0) [\varphi'(0)] \right) t + o(|t|)$$

il resto segue dalle definizioni $\square$

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$$

in rosso
la curva (nel
grafico)

$$(x_0 + t, y_0, f(x_0 + t, y_0))$$

con vettore velocità in $t=0$

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) = v_1$$

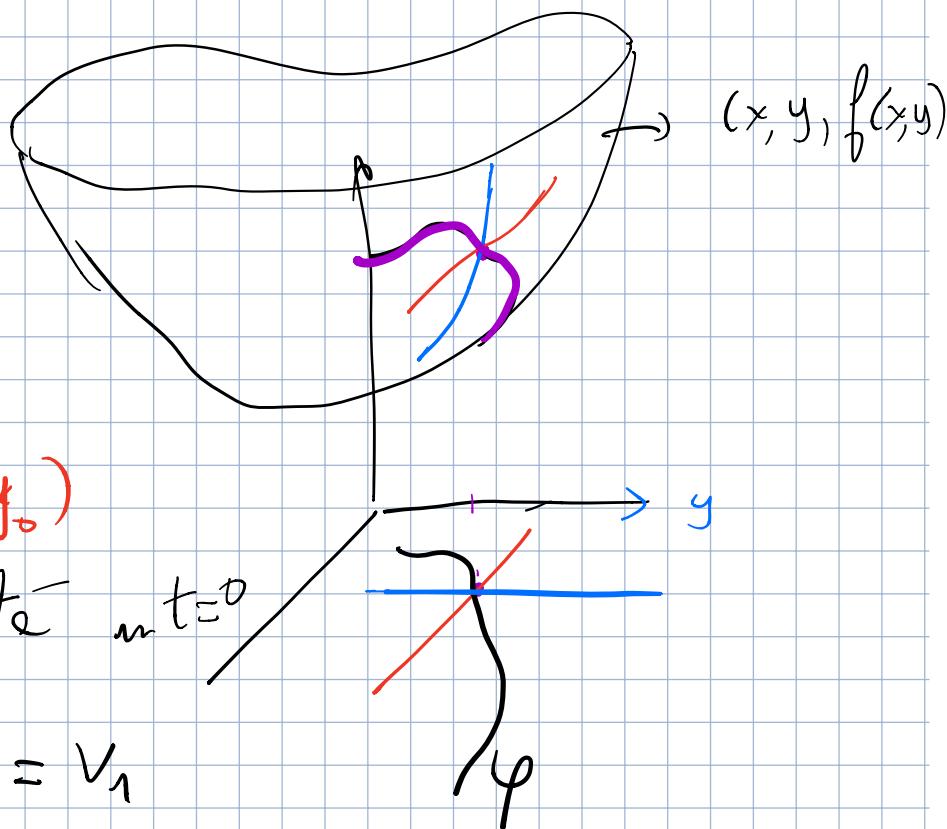
in blu sul grafico la curva

$$(x_0, y_0 + t, f(x_0, y_0 + t))$$

con velocità $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \stackrel{v_2}{=} \text{per } t=0$

in viola

noi date $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenziabile



considero le curve sul grafico

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), f(\varphi(t)))$$

con velocità

$$(\dot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_2(0), \frac{\partial f}{\partial x} \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{\varphi}_2) =: v_3$$

verificare che $v_3 \in \text{Span}(v_1, v_2)$!

questo è il piano tangente.

Il teorema del differenziale totale.

seguente

Proposizione 2.7 ("Teorema del differenziale totale") Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contenente x e sia f una funzione (a valori reali) continua su E . Assumiamo che esistano le derivate parziali di f in E e che queste siano continue in x . Allora f è differenziabile in x .

facciamo in $\mathbb{R}^2$.

$f(x, y)$ è continua in E e le

derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

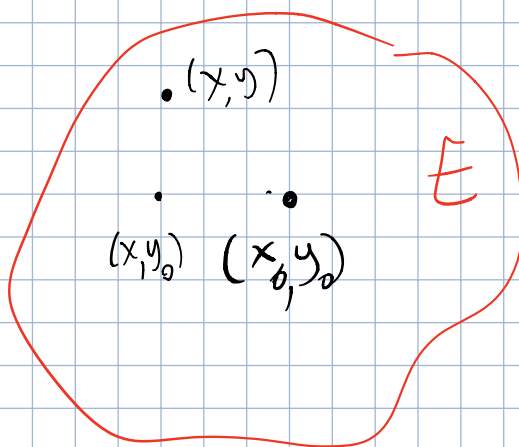
sono continue (sono funzioni $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

in $(x_0, y_0) \in E$

Voglio dimostrare la differenziabilità in (x_0, y_0)

usando il Teorema di Lagrange

in 1. Variabile



Voglio dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y-y_0)$$

$$y_0 < \xi < y$$

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y_0)(x - x_0)$$

$$x < \eta < x_0$$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y_0)(x - x_0)$$

$$\frac{f(x, y) - \left(f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)(y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$$\text{mo} \quad \text{so} \quad \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1$$

$$\text{e } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$$

dato che le derivate parziali sono
continue in (x_0, y_0) .

— . — . —

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è

omogenea di grado $\alpha > 1$ e

continua allora è differenziabile in

$$\vec{x} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla f(0) = \vec{0}$$

infatti

$$\frac{f(\vec{x}) - 0 - 0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - 0|} =: R(\vec{x})$$

posto

$R(x)$ è definita in $\mathbb{R}^n / \{0\}$ ed è

omogenea di grado $d-1 > 0$

inoltre se f è continua lo è

anche R quindi $\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = 0$

così f è differenziabile.

N.B. le derivate parziali sono funzioni omogenee di grado $d-1$.

Legame fra gradiente e curve di livello

se $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(t_0) = x_0$

(φ differenziabile) e

$f(\varphi(t)) = \text{costante}$