

Consideriamo una funzione $C^2(E, \mathbb{R})$
che è definita in E aperto ivi continua e
con derivate parziali prime e seconde continue.

Vogliamo trovare i punti di massimo e
minimo di f su E .

Abbiamo visto che

Proposizione 5.11 Se E è un aperto di $\mathbb{R}^n$ valgono le seguenti affermazioni:

(i) Condizione necessaria affinché una funzione $f \in C^1(E)$ abbia un punto di minimo o massimo locale in $x_0 \in E$ è che x_0 sia un punto critico per f . $\nabla f(x_0) = 0$

(ii) Se $f \in C^2(E)$, x_0 è un punto critico per f e $f''(x_0) > 0$ (rispettivamente " $f''(x_0) < 0$ "), allora f ha un minimo locale (rispettivamente "massimo locale") in senso stretto nel punto x_0 .

(iii) Se $f \in C^2(E)$, x_0 è un punto critico per f e $f''(x_0)$ ha un autovalore positivo ed uno negativo, allora x_0 non è né un minimo né un massimo locale⁸.

Quindi come prime cose troviamo

tutte le soluzioni di $\nabla f(x) = 0$

(Nota Bene. non è detto che ci siano
un # finito di soluzioni!)

per esempio: $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 =: f(x, y)$

$$\nabla f = \left[2(x^2 + y^2) - 1 \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Il gradiente si annulla su $(x, y) = (0, 0)$
e su tutti i punti della circonferenza

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

Ore di ciascun punto critico (x_0, y_0)
calcoliamo il Hessiano e determiniamo
gli autovalori λ_1, λ_2 (dipendono da (x_0, y_0) !)

- ① Se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ho un MINIMO
- ② Se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ho un MASSIMO
- ③ Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ ho una SELLA
- ④ Se uno o entrambi gli autovalori
sono $= 0$ devo studiare la funzione

Questo schema vale in qualsiasi dimensione

se TUTTI gli autovalori sono $> 0 \Rightarrow$ MINIMO

se TUTTI " " " " $< 0 \Rightarrow$ MASSIMO

se almeno 1 < 0 e almeno 1 $> 0 \Rightarrow$ SELLA

se ho k autovalori $= 0$ e gli altri > 0

è l'unica cosa che so e che NON ho un massimo.

Esempio: $\cos(x) + \cos(y) =: f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\sin y \end{pmatrix}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= k\pi \\ y &= h\pi \end{aligned}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -\cos k\pi & 0 \\ 0 & -\cos h\pi \end{pmatrix}$$

$$\text{ma } \cos k\pi = (-1)^k \quad \text{punti'}$$

STRETTO

① Se h, k sono entrambe pari un MAX

② Se " " " " dispari un MIN

③ se h è pari e k è dispari una SELLA.

Perché nel caso di autovalori $= 0$ non ho informazioni? Vediamo degli esempi

① $f_1(x, y) = x^2$ ha tutti i punti della forma $(0, y_0)$ come punti critici

l'Hessiano è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e tutti i punti sono MINIMI

② $f_2(x, y) = x^2 - y^4$ ha sempre un punto critico in $(0, 0)$ $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3y^3 \end{pmatrix}$

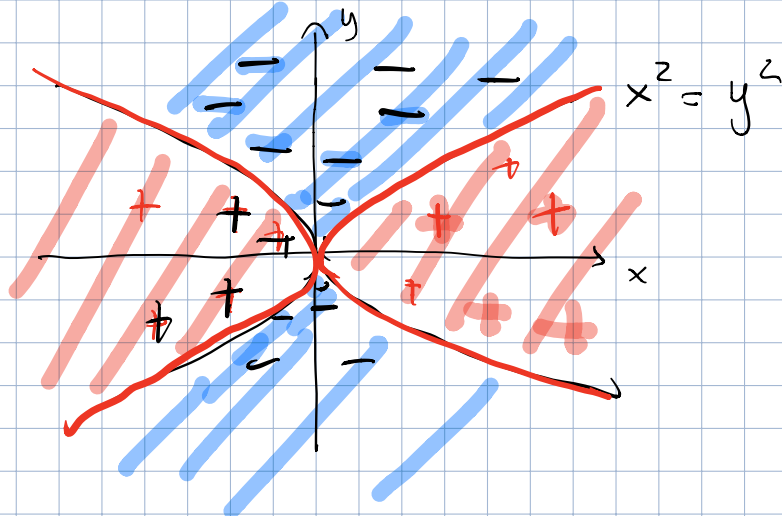
l'Hessiano in $(0, 0)$ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(quindi è quello di f_1)

$(0, 0)$ È UNA SELLA!

infatti $f_2(0,0) = 0$

nella zona
rosse

$$f(x,y) \geq f(0,0)$$



infatti $x^2 - y^4 \geq 0$

nella zona blu $f(x,y) < f(0,0)$

(le curve $x = \pm y^2$ separa le due regioni!)

③ $f_3(x,y) = x^2 + y^4$ ha sempre un punto

critico in $(0,0)$ $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}$

l' Hessiano in $(0,0)$ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(quindi = a quello di f_1)

$(0,0)$ è un MINIMO stretto!

infatti $x^2 + y^4 \geq 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$

In conclusione (un drm in più!)

Se $\vec{x}_0$ è un punto critico con matrice Hessiana semi-definita positiva
per $f(\vec{x})$ posso solo dire che NON È
un MASSIMO.

Inoltre posso costruire esempi con
 x_0 critico *la stessa matrice Hessiana in x_0*
e ① un MINIMO NON STRETTO ② una sella
③ un MINIMO STRETTO

Quindi se x_0 è un punto critico con
matrice Hessiana semi-definita ≥ 0

In quel caso bisogna studiare la
disuguaglianza $f(\vec{x}) \geq f(x_0)$

① se è soddisfatta in un intorno di x_0
 $\Rightarrow$ un minimo

② Se **ARBITRARIAMENTE VICINO** a x_0

ci sono sia punti $\vec{x}^+$ con $f(\vec{x}^+) > f(x_0)$

che punti $\vec{x}^-$ con $f(\vec{x}^-) < f(x_0)$

è una sella

(Per esempio basta trovare una
successione di punti $x_i^+ \rightarrow x_0$ e $x_i^- \rightarrow x_0$
con $f(x_i^+) > f(x_0) > f(x_i^-)$)

oppure basta trovare due curve $\varphi_+(t)$

e $\varphi_-(t)$ in modo che $\varphi_+(0) = x_0 = \varphi_-(0)$

e $f(\varphi_+(t))$ ha un massimo in $t=0$

mentre

$f(\varphi_-(t))$ ha un minimo in $t=0$.

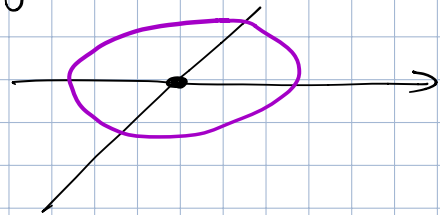
È sempre $f(x,y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)$

$$\nabla f = 2 \left[(x^2 + y^2) - 1 \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$(x,y) = (0,0)$$

$$(x,y) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi)$$

$$H = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 6y^2 + 2x^2 \end{pmatrix}$$



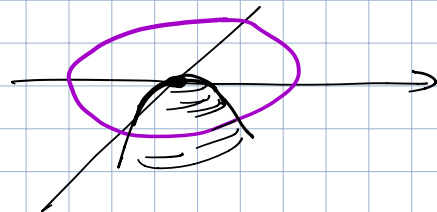
quindi $(0,0)$ è un

minimo.

Se calcolate l'Hessiano

in uno dei

$$(\cos \theta, \sin \theta)$$



VIENE SEMIDEFINITO (se fosse definito

positivo avrei un MAX stretto ma

NON È POSSIBILE DATO che

io so che lungo tutte le circonferenze
 $x^2 + y^2 = 1$ la funzione ha lo stesso
valore, stesso se fosse $H < 0$)

in generale se ho una curva di
punti critici allora l'hermiano non
può essere definito né > 0 né < 0 .

$$\text{Però } f(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

e evidentemente

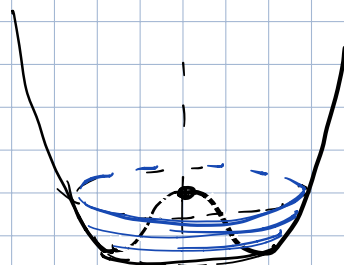
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) \geq -\frac{1}{2} \quad \forall (x, y)$$

infatti posto $r^2 = x^2 + y^2$ ottengo

$$r^4 - 2r^2 + 1 \geq 0 \quad \text{che è SEMPRE VERIFICATO!} \quad \blacktriangledown$$

del resto

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)$$



$\bar{e}$ ottenuto ruotando

$$z = \frac{1}{2}r^4 - r^2$$

attorno all'asse $\hat{z}$

