Dimostrazione della formula di Taylor al II°

Rem se $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è C^2 in un intorno
$t\to F(t)$ di $t=0$

allora (Taylor in dim. 1 Resto di Peano)

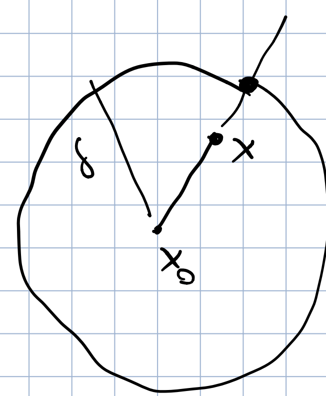
$$F(t) = F(0) + F'(0)\,t + \frac{1}{2}F''(0)\,t^2 + o(|t|^2)$$

Considero $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^2 in un aperto A

prendo $x_0\in A$ e sia $B_\delta(x_0)\subset A$

per $x\in B_\delta(x_0)$ fissato pongo

$$F(t) = f\left(x_0 + \frac{t(x-x_0)}{|x-x_0|}\right)$$



$F(0) = f(x_0)$

$F(|x-x_0|) = f(x)$

e F è $C^2((-\delta,\delta),\mathbb{R})$

quindi

$$f(x) = F(|x-x_0|) =$$

$$= F(0) + F'(0)\,|x-x_0| + \frac{1}{2}F''(0)\,|x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2)$$

Ora $\quad F(t) = f\left(x_0 + t\,\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}\right)$

$$F'(t) = \nabla f\left(x_0 + \frac{t(x-x_0)}{|x-x_0|}\right) \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$$

$$\left[\ \text{Rem}\quad \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \right]$$

$\to$ quindi $\quad F'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \dfrac{x-x_0}{|x-x_0|}$

$$\to F'(t) = \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_J}\Big(\overbrace{x_0 + \frac{t(x-x_0)}{|x-x_0|}}^{x(t)}\Big)\ \frac{(x_J - x_{0J})}{|x-x_0|}$$

$$\frac{d}{dt} F'(t) = \sum_{J=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_J}(x(t))\right) \frac{(x_J - x_{0J})}{|x-x_0|}$$

$$x_i(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) \frac{(x_i - x_{0i})}{|x-x_0|} \right) \frac{(x_j - x_{0j})}{|x-x_0|}$$

$$= \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \cdot H_{f, x(t)} \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$$

$$F''(0) = \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \cdot H_{f,x_0} \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$$

Sostituisco

$$f(x) = F(|x-x_0|) =$$

$$= F(0) + F'(0)\,|x-x_0| + \frac{1}{2} F''(0)\,|x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2)$$

$$= f(x_0) + \frac{\nabla f(x_0) \cdot (x-x_0)}{\cancel{|x-x_0|}} \cdot \cancel{|x-x_0|} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(x-x_0)}{|x-x_0|} \cdot H_{f,x_0} \frac{(x-x_0)}{|x-x_0|} \cdot |x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2)$$

$$= f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)\cdot H\,(x-x_0) + o(|x-x_0|^2)$$

$\boxtimes$

Max e Min non degeneri

Dimostriamo che

PROP. se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è C^2 e x_0 è un punto critico t.c. $H_{f,x_0} > 0$ (tutti gli autovalori > 0) allora x_0 è un punto di minimo

Mi serve il seguente

<u>LEMMA</u>: Se $M > 0$ allora

$$\inf_{v\in S^1} v\cdot Mv = \min_{v\in S^1} v\cdot Mv = c > 0$$

Dim. della PROP (dando per vero il Lemma)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0) \cdot H(x-x_0) + o(|x-x_0|^2)$$

quindi

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x-x_0) \cdot H(x-x_0) + o(|x-x_0|^2)$$

$$= \frac{|x-x_0|^2}{2}(v \cdot Hv) + o(|x-x_0|^2)$$

dove $v = \dfrac{x-x_0}{|x-x_0|} \in S_1$ quindi

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{|x-x_0|^2}{2} \cdot c + o(|x-x_0|^2)$$

ma per definizione se $|x-x_0| < \delta$ suff piccolo allora

$$|o(|x-x_0|^2)| < \frac{c}{4}|x-x_0|^2$$

quindi

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{c}{2}|x-x_0|^2 - \frac{c}{4}|x-x_0|^2 > 0$$

ho un minimo STRETTO !

DIMOSTRIAMO IL LEMMA:

se M ha tutti gli autovalori >0 allora

$\inf_{v \in S_1} (v \cdot Mv) = \min (v \cdot Mv) =: c > 0$

① l'inf. è un minimo perché la funzione $v \longrightarrow v \cdot Mv$ è continua e S^1 è un compatto.

Ora chiamiamo v_m il vettore che realizza il minimo.

$c = v_m \cdot M v_m$

M è diagonalizzabile $M = O^T D O$

(O matrice ortogonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$)

$v_m \cdot M v_m = O v_m \cdot D O v_m$ ma posto

$w_m = O v_m$

$$c = w_m \cdot D\, w_m = \sum \lambda_i\, w_{mi}^2 > 0 \;!$$

(tutti i $\lambda_i > 0$!)

Per esercizio dim. che se M è indefinito $\Rightarrow$ $\exists\, v : v \cdot M v > 0$

$\exists\, w : w \cdot M w < 0$.

Dedurne che se H_{f, x_0} è indefinito (e x_0 è un punto critico) allora x_0 è un PUNTO DI SELLA.

Il teorema della funzione IMPLICITA

Consideriamo una funzione C^1

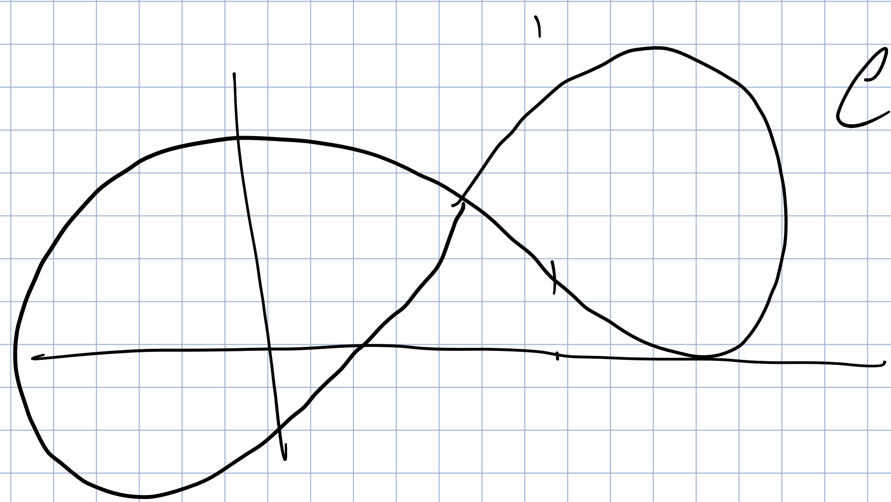
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

e consideriamone una CURVA DI LIVELLO

$$\mathcal{C} := \{ (x,y) : f(x,y) = 0 \}$$

IN GENERALE $\mathcal{C}$ non è il grafico

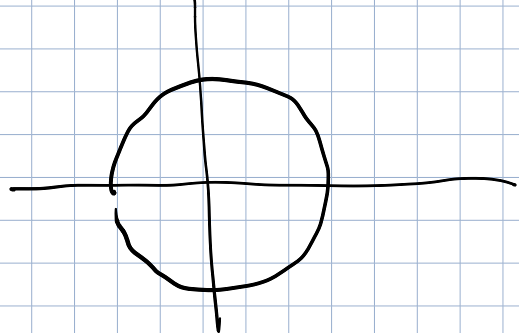
di una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



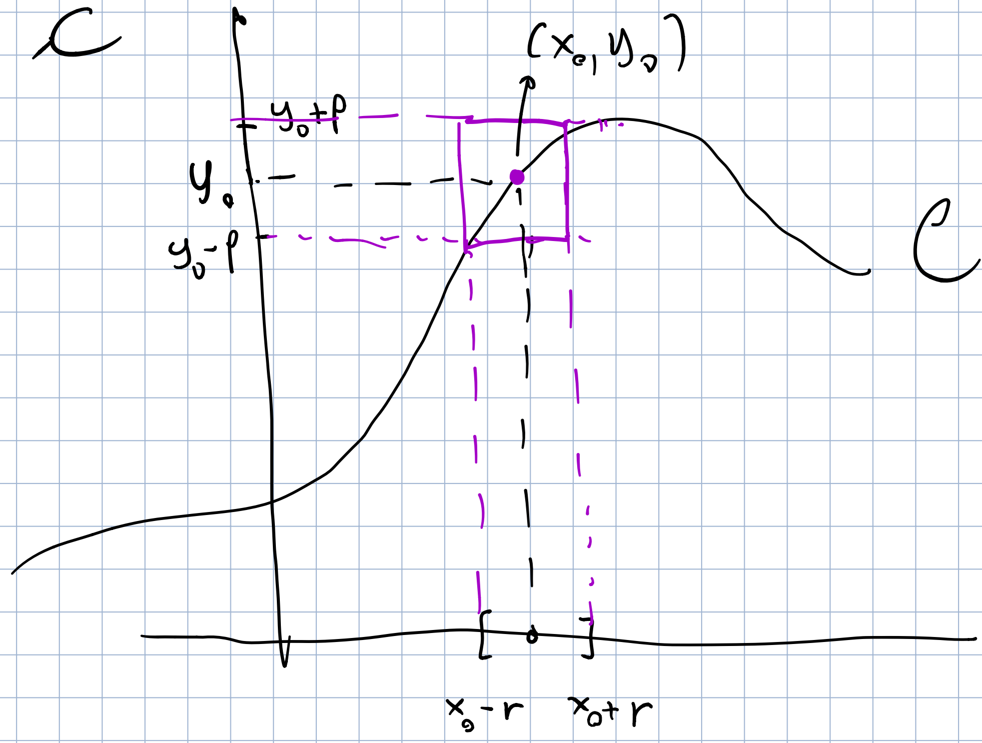
anche in esempi semplici

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

oppure $x = \pm\sqrt{1-y^2}$



Voglio descrivere delle condizioni che permettano di descrivere C tramite il grafico di una funzione LOCALMENTE VICINO a un $(x_0, y_0) \in C$



$$R = [x_0-r, x_0+r] \times [y_0-\rho, y_0+\rho)$$

Dentro il rettangolo viola C è il grafico di una funzione

Più precisamente:

$\exists \; g: [x_0-r, x_0+r] \longrightarrow [y_0-\rho, y_0+\rho]$ tc.

$C \cap [x_0-r, x_0+r] \times [y_0-\rho, y_0+\rho)$

coincide con il grafico di $g(x)$ cioè

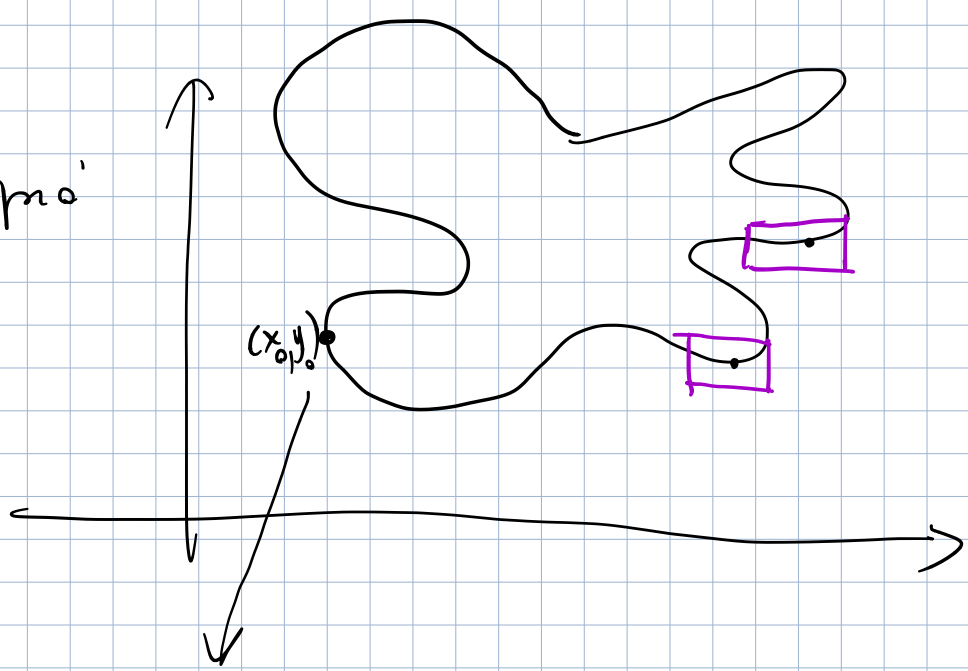
$f(x, g(x)) = 0$ e se $f(x,y) = 0$ per

$\forall\, x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ $\qquad (x,y) \in R$

allora

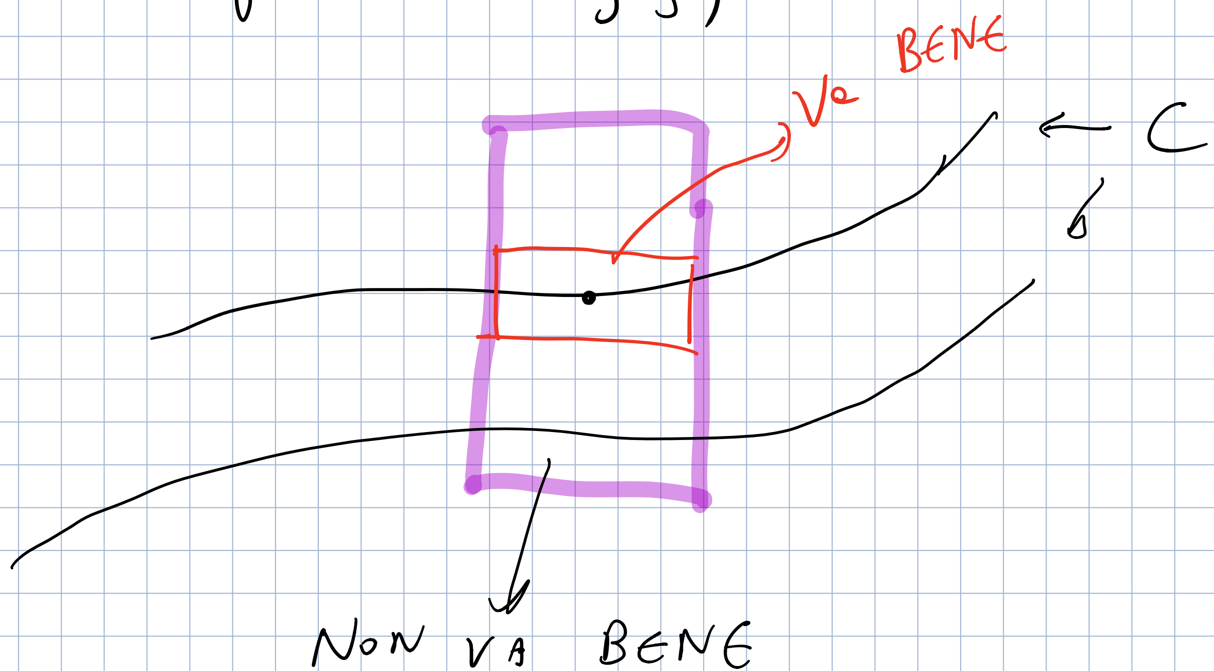
$y = g(x)$

Esempio



NON posso esplicitare come $y = g(x)$

MA posso fare $x = g(y)$

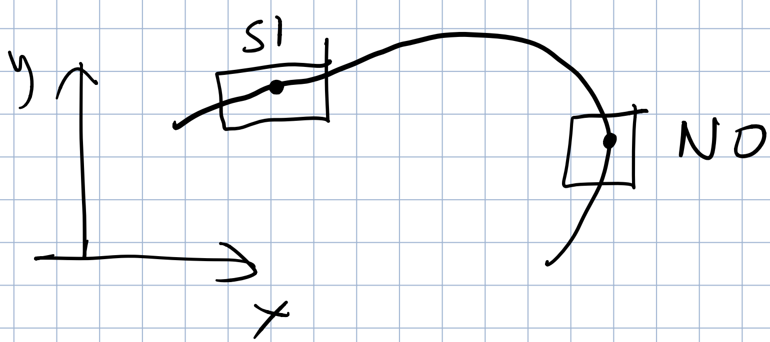


Nel rettangolo viola C è l'unione dei grafici di DUE funzioni!

Quale condizione si usa?

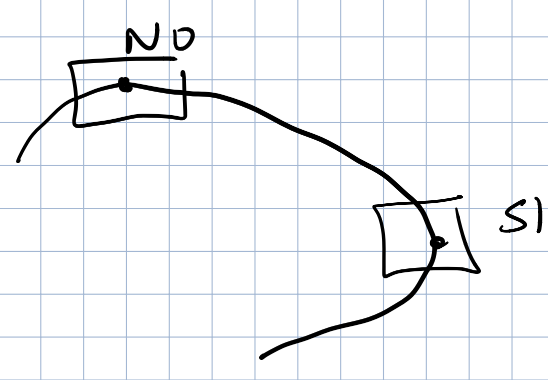
Posso esplicitare $y = g(x)$ vicino a (x_0, y_0) se la retta tangente a C in (x_0, y_0) NON è verticale!

$y = g(x)$



Posso esplicitare $x = G(y)$ se la retta tg. non è orizzontale!

$x = G(y)$



PROPOSIZIONE:

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 in (x_0, y_0).

se

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$$

allora $\exists\ \rho, r$: $C: \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$

è localmente esplicitabile

in $R := [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - \rho, y_0 + \rho]$

cioè $C \cap R$ coincide col grafico

di una funzione $g: [x_0 - r, x_0 + r] \to [y_0 - \rho, y_0 + \rho]$

Inoltre g è C^1.

CASO GENERALE

In generale si ha $F(\underset{\mathbb{R}^m}{x}, \underset{\mathbb{R}^n}{y})$

$$F = (F_1(x,y), \ldots, F_n(x,y))$$

$F(x,y)=0$ sono n equazioni in $n+m$ incognite

voglio risolvere per le y

Esempio: $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$

$F(x,y) = Ax + By$

(una funzione lineare da $\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$)

A è una matrice $n \times m$

B " " $n \times n$

$F(x,y)=0 \Rightarrow By = -Ax \Rightarrow y = -B^{-1}Ax$

(se B è invertibile!)

PROPOSIZIONE

$F: \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una funzione

continua assieme alla matrice Jacobiana

$J_y F$ (derivate parziali rispetto alle y tenendo ferme le x)

se $F(x_0, y_0) = 0$ $\det J_y F(x_0, y_0) \neq 0$

allora esiste una e una sola funzione

$g : B_r(x_0) \to B_\rho(y_0)$ continua

t.c. $g(x_0) = y_0$ $F(x, g(x)) = 0$ $\forall x \in B_r(x_0)$

e se $F(x,y) = 0$ con $(x,y) \in B_r(x_0) \times B_\rho(y_0)$

allora $y = g(x)$

Vorrei anche un criterio per calcolare

i parametri r, ρ !

In generale il problema si

pone nei seguenti termini

sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ e sia $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$

con $n < N$ una funzione C^1

in un punto $\vec{x}_0$

Se $JF(\vec{x}_0)$ ha RANGO MASSIMO $(= n)$

allora posso dividere $\vec{x} = (z, y)$

(a meno di riordinare le variabili)

in modo che $z \in \mathbb{R}^{N-n}$ $y \in \mathbb{R}^n$

e $J_y F(\vec{x}_0)$ è invertibile quindi

$$F(\vec{x}) = 0 \iff y = g(z)$$