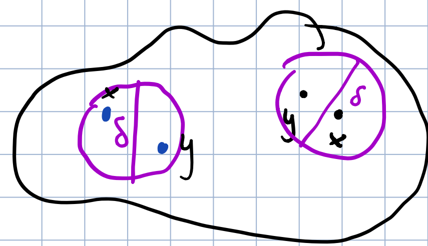
Def: $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$

è unif. continua in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) : \forall \ x, y \in A, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$



Teorema:

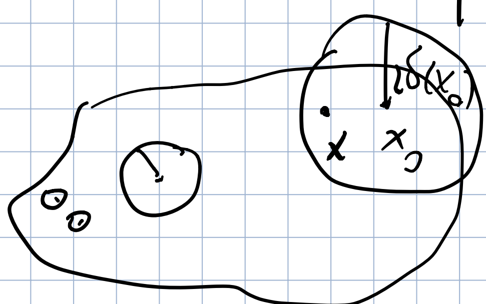
f continua su K compatto $\Rightarrow$

f è unif. continua.

Dim. Dato che f è continua: $\forall x_0 \in K \ \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta(\varepsilon, x_0)$: se $x \in B_{2\delta(\varepsilon, x_0)}(x_0)$ allora

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



al variare di x_0 cambia δ!

$\forall \ x_0 \in K$ considero $B_{\delta(\varepsilon, x_0)}(x_0)$ (palla aperta di raggio δ)

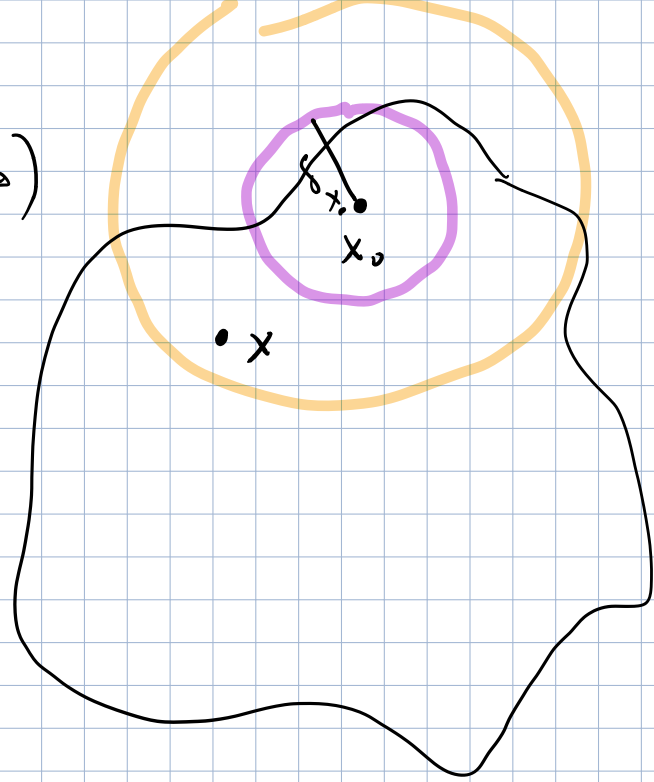
ovviamente $K \subset \bigcup_{x_0 \in K} B_{\delta(x)}(x_0)$ [per comodità tolgo ε da $\delta(\varepsilon, x_0)$]

REM: $\delta(\varepsilon, x_0)$

se $|x - x_0| < 2\delta(x_0)$

allora

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



Detto che $\{B_{\delta(x_0)}(x_0)\}_{x_0 \in K}$ è un

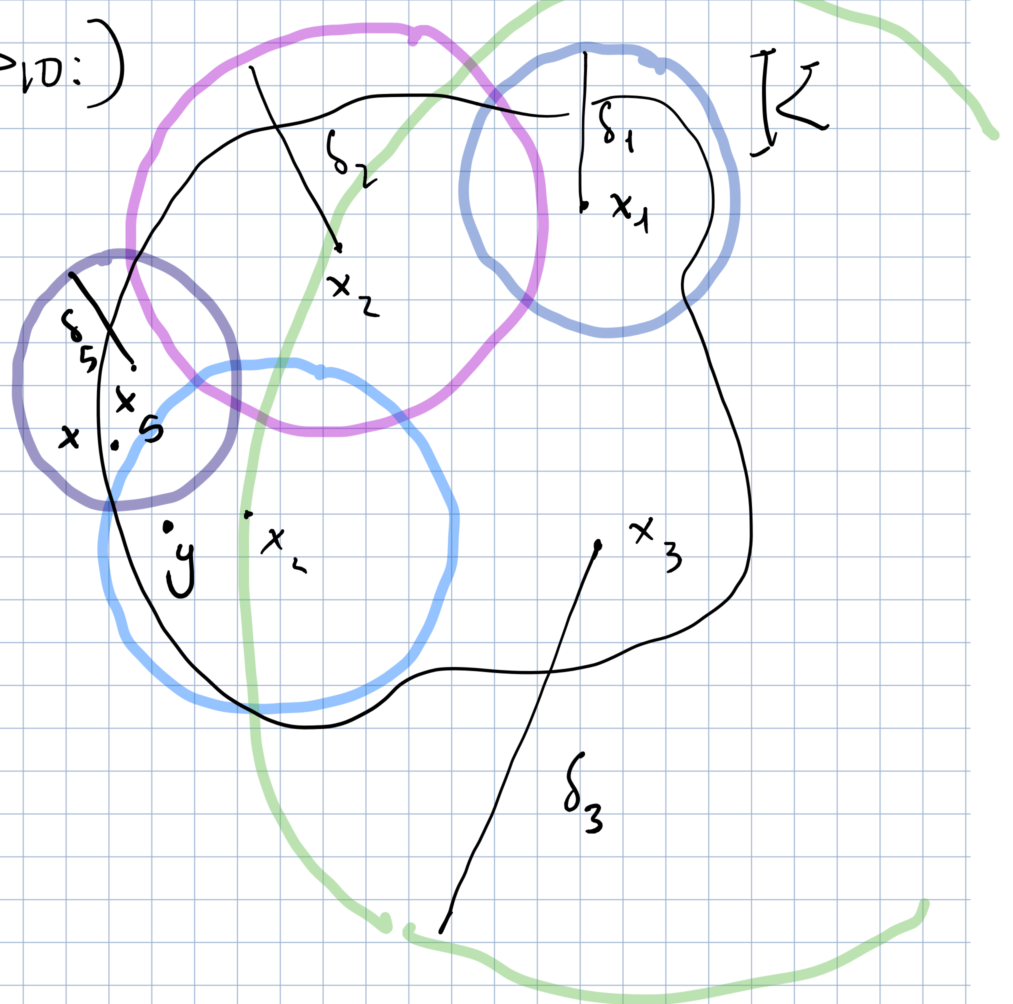
RICOPRIMENTO APERTO di K (è compatto)

$\exists$ un sottoricoprimento FINITO

$$\{B_{\delta(x_1)}(x_1), B_{\delta(x_2)}(x_2), \dots, B_{\delta(x_N)}(x_N)\}$$

$$\delta := \min_{i=1,\dots,N} (\delta(x_i))$$

(IN QUESTO ESEMPIO:)



$\min(\delta(x_i)) = \delta(x_5)$

ora se $|x-y|<\delta$

dato $x \in K$ so che $x \in B_{\delta(x_k)}(x_k)$ per un qualche $k \leq N$

quindi sicuramente $|f(x)-f(x_k)| < \varepsilon$ ma (REM $\delta = \min_{i=1,\dots,N} \delta(x_i)$)

$|x-y| < \delta \leq \delta_k \Rightarrow |y-x_k| \leq |x-x_k| + |x-y| < 2\delta_k$

quindi anche $|f(y)-f(x_k)| < \varepsilon$

in conclusione

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_k)| + |f(y)-f(x_k)| < 2\varepsilon$$

☒