

Presentazione del programma:

1. Funzioni in più variabili

Una funzione è una legge che a ogni elemento d'un insieme A (dominio) associa un elemento d'un insieme B (codominio)

In analisi 1 si studiano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(o comunque $A \subseteq \mathbb{R}$)

1. Continuità ; 2. Differenziabilità ; 3. Sviluppo di Taylor, 4. punti di massimo e minimo, 5. Studio del grafico ; 6. Integrazione

Vo gliamo rivedere questi concetti in un contesto più generale di funzioni

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(discuteremo anche questi concetti in contesti più astratti in cui dominio e/o codominio sono "spazi metrici")

2. Teorema della funzione inversa e della funzione implicita.

a). Riconoscere quando una funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è invertibile

b) Esplicitare (risolvere) almeno localmente equazioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Ad algebra lineare dovreste aver studiato come risolvere equazioni della forma

$$\hat{M} \vec{x} = \vec{b}$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ incognite $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ termine noto

$\hat{M}$ matrice (m righe $\times$ n colonne)

vogliamo dei metodi per risolvere equazioni non-lineari.

Esempio in $\mathbb{R}^2$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

posso descrivere

il luogo dei punti $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$
come il grafico di 1 funzione?

(posso esprimere y in funzione di x ?)

3. Equazioni differenziali.

$$t \rightarrow \vec{x}(t)$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la traiettoria di un punto

materiale soggetto a una forza $\vec{F}$

che dipende dalla posizione

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \vec{a} & \Leftrightarrow & \begin{cases} F(x(t)) = m \ddot{x}(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \end{aligned}$$

è un'equazione differenziale (l'incognita
è una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e l'equazione
esprime la derivata 2 come funzione della
posizione)

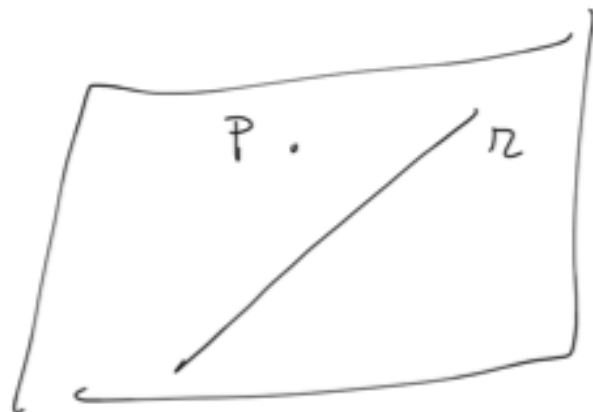
Lo studio delle funzioni in n variabili è molto + difficile (soprattutto da visualizzare) rispetto alle funzioni di 1 variabile.

La prima osservazione è che in $\mathbb{R}^n$ è abbastanza naturale quale sistema di coordinate usare



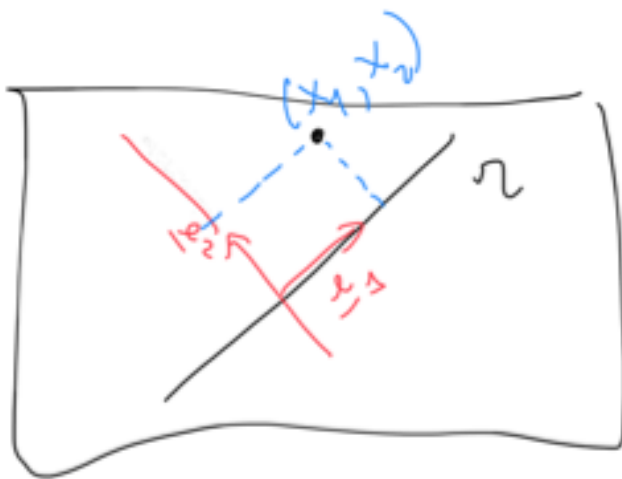
in uno spazio di dimensione > 1
Non è così ovvio.

Esempio
 $f(P) = \text{dist}(P, r)$

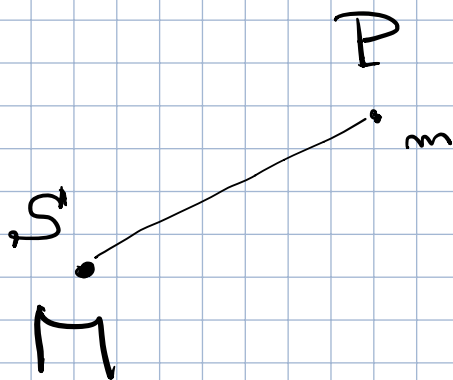


se prendo come riferimento

$$f(x_1, x_2) = x_1$$



Esempio (potenziale gravitos.)

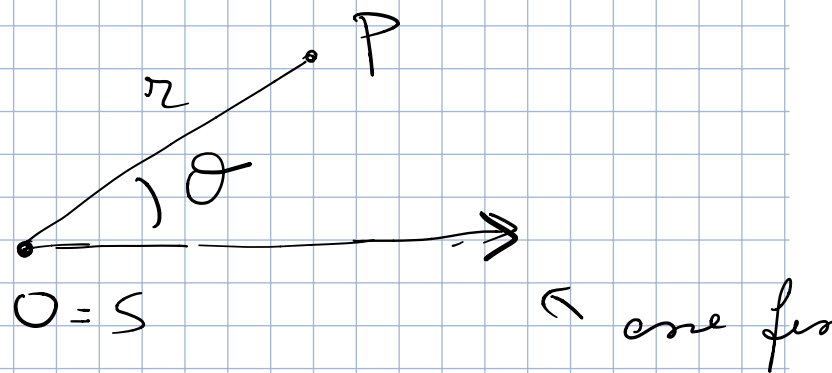


$$P \longrightarrow \frac{1}{\text{dist}(P, S)}$$

definito $\forall P \neq S$

le coordinate che rendono la
funzione + semplice con le

polari



Nella prima parte del corso
sostanzialmente ignoreremo il problema
dei "cambi di coordinate"

e penseremo a funzioni da

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{dove } \mathbb{R}^n \text{ e } \mathbb{R}^m$$

sono gli spazi euclidei dotati della
base canonica e prodotto scalare
standard.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ è uno Spazio Vettoriale Reale

2. dimensione tre ($\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base)

in generale $\mathbb{R}^n$ ha dim n
definisce

1. Prodotto scalare $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

2. norma $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

3. distanza fra 2 punti

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|$$

Rem. Il prodotto scalare permette

di definire "l'angolo" fra due vettori

infatti si verifica facilmente che

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$



questo è il valore assoluto

questo è la
NORMA

quindi $\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} =: \cos \theta$

Dim.

Dim. la disuguaglianza $\perp$.

CAUCHY-SCHWARZ

Per: $x \cdot y = \sum x_i y_i$

da cui facilmente $x \cdot x \geq 0$ e

$x \cdot x = 0$ solo se $x = \vec{0}$

$x \cdot y = y \cdot x \quad a \in \mathbb{R} \Rightarrow (ax) \cdot y = a(x \cdot y)$

$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

$0 \leq (x - ty) \cdot (x - ty)$

$x \cdot (x - ty) - t y \cdot (x - ty)$

1)

$$0 \leq x \cdot x - t(x \cdot y) - t(y \cdot x) + t^2(y \cdot y)$$

$$|x|^2 - 2t(x \cdot y) + t^2|y|^2 \geq 0$$

$$\textcircled{A} \quad 2t(x \cdot y) \leq |x|^2 + t^2|y|^2$$

$$\# \quad (x \cdot y) \leq \frac{1}{2t} (|x|^2 + t^2|y|^2) \quad \forall t > 0$$

$$\text{se } x=0 \text{ o } y=0$$

le diseg. è OVVI A punti $x, y \neq 0$

$$\text{pongo } t = \frac{|x|}{|y|}$$

$$x \cdot y \leq \frac{|y|}{2|x|} \left(|x|^2 + \frac{|x|^2}{|y|^2} |y|^2 \right) = |y||x|$$

allo stesso modo da $\textcircled{A}$ se $t < 0$

$$x \cdot y \geq \frac{1}{2t} (|x|^2 + t^2 |y|^2)$$

e poniendo $t = -\frac{|x|}{|y|}$ se sigue

$$x \cdot y \geq |y| |x|$$