12.1. L'integrazione

Come il calcolo differenziale, anche la teoria dell'integrazione si estende a funzioni di più variabili. Per semplicità, ci limiteremo anche qui – almeno nelle dimostrazioni dei teoremi – al caso di due variabili. Avvertiamo comunque che i risultati valgono con le opportune modifiche anche per funzioni di n variabili.[1]

Per quanto riguarda la definizione di funzioni integrabili, non c'è grande differenza rispetto al caso di una variabile; il solo punto di una certa rilevanza consiste nel fatto che mentre in una variabile gli integrali si facevano prevalentemente su un intervallo, ora non ci sono domini di integrazione privilegiati. I più semplici sono ovviamente i rettangoli, ma spesso si devono calcolare integrali estesi a triangoli, cerchi, ellissi, o altro.

D'altra parte ci si può ridurre a considerare sempre l'integrale su tutto $\mathbf{R}^2$; infatti se si vuole integrare una funzione limitata $f(\mathbf{x})$ su un insieme E limitato, basterà porre uguale a zero la funzione f fuori di E. La nuova funzione f^*, che vale f in E e zero fuori di E, sarà limitata (perché f era limitata in E) e varrà 0 fuori di un rettangolo (basterà prendere un rettangolo che contiene E). In questo modo, almeno formalmente, si elimina dalla definizione la considerazione dell'insieme di integrazione.

In generale se voglio calcolare l'integrale di f LIMITATA su un insieme E LIMITATO definisco la FUNZIONE CARATTERISTICA di E;

$$\chi_E(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{x} \in E \\ 0 & \text{se } \vec{x} \notin E \end{cases}$$

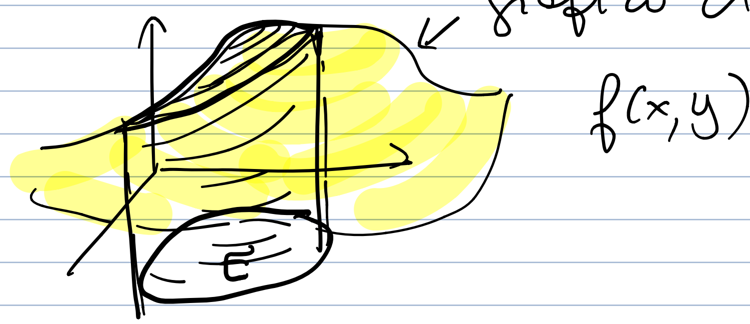
in modo che

$$f_*(x) = f(x)\,\chi_E$$

N.B. l'integrale di f sull'insieme E

$\int_E f(\vec{x})\,d\vec{x}$ è il volume

del cilindro che



ha come base

inferiore E e come

base superiore il grafico di f

N.B. E può essere anche complicato

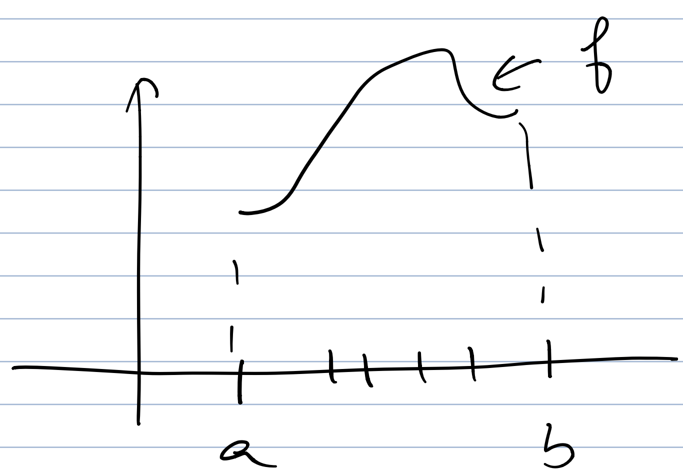
Per calcolare il volume si usa un metodo

di approssimazione con VOLUMI NOTI

(proprio come nel caso di funzioni di 1

variabile si usano aree NOTE.)

1. DIM

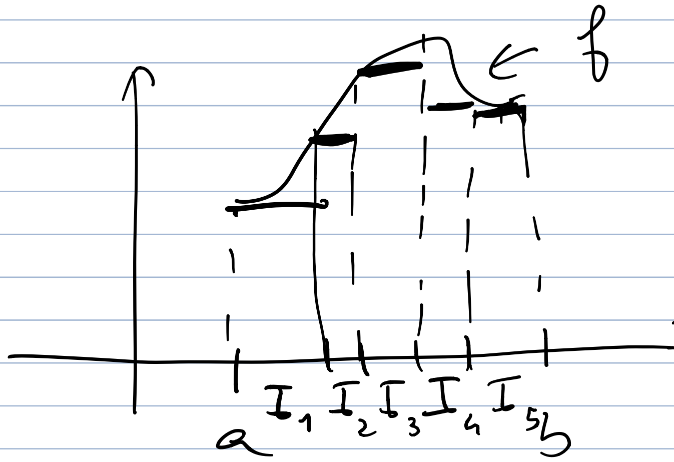


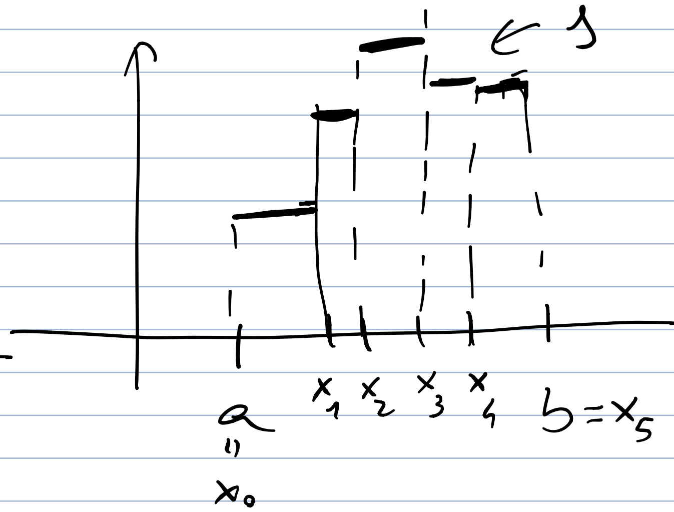
introduco una Partizione di (a, b)

in intervalli $I_1, \dots, I_n$

(NON NECESSARIAMENTE uguali tra loro)

APPROSSIMO f con una funzione costante a tratti s





$$s(x) = \left\{ \inf_{x_1 \in I_j} (f(x_1)) \quad \text{per } x \in I_j \right.$$

$$\int f(x)\,dx \geq \int s(x)\,dx = \sum \Big(\inf_{y \in I_j} f(y) \Big) |x_i - x_{i-1}|$$

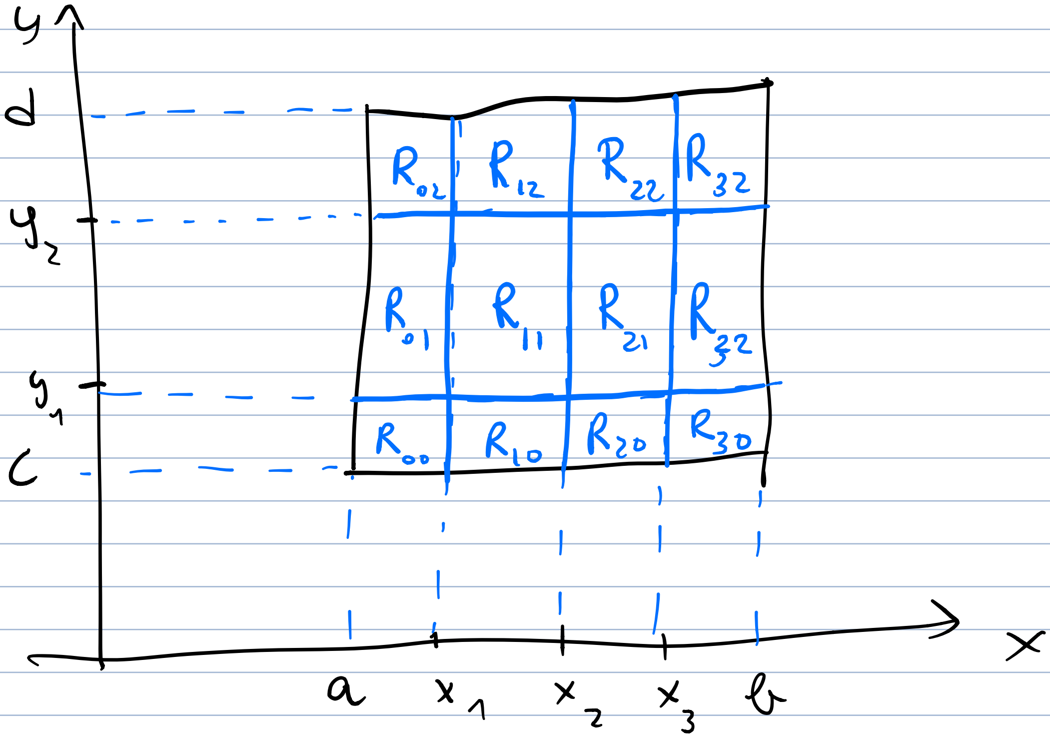
In dimensione 2

Cominciamo a dare alcune definizioni. In primo luogo, un *rettangolo* è il prodotto cartesiano di due intervalli $[a, b) \times [c, d)$, cioè l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ che hanno la prima coordinata x in $[a, b)$ e la seconda in $[c, d)$:[2]

$$R = [a, b) \times [c, d) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d\}.$$

Partizione

Operiamo ora una suddivisione di $[a, b)$ in n sottointervalli mediante i punti $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, e una suddivisione di $[c, d)$ in m sottointervalli mediante i punti $y_0 = c, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m = d$. Posto $I_h = [x_{h-1}, x_h)$ e $J_k = [y_{k-1}, y_k)$, il rettangolo R verrà suddiviso in $n \times m$ rettangolini $R_{hk} = I_h \times J_k$.



l'area del rettangolo R_{iJ}

si indica con

$$|R_{iJ}| := (x_i - x_{i-1})(y_J - y_{J-1}) > 0$$

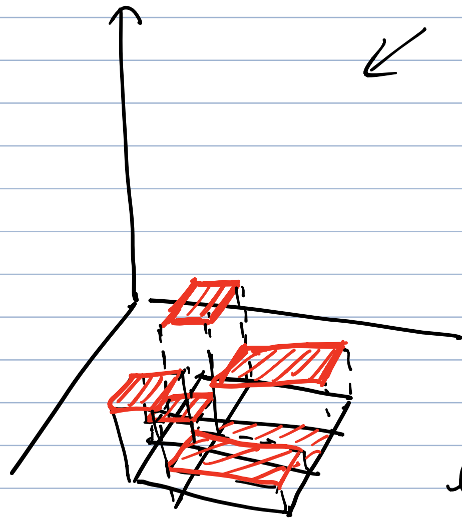
DEF. (FUNZIONE semplice)

Una funzione semplice è una funzione che assume un valore costante su ognuno di questi rettangolini, e che vale 0 fuori di R. Se indichiamo con λ_{hk} il valore che φ assume in R_{hk}, avremo

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk} \varphi_{R_{hk}}(x)$$

dove con $\varphi_{R_{hk}}$ si è indicata la funzione caratteristica di R_{hk}.

~~Per queste funzioni si definisce l'integrale.~~



una funzione semplice

la regione sotto al grafico è fatta di PARALLELEPIPEDI base R_{IJ} altezza λ_{IJ}

Per queste funzioni si definisce l'integrale:

$$\int \varphi\, dxdy = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk}\, \mathrm{m}(R_{hk}) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk}\, \mathrm{m}(I_h)\, \mathrm{m}(J_k) =$$
$$= \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk}\, (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1}).$$

λ_{hk} è l'altezza del parallelepipedo di base R_{IJ} quindi

$\lambda_{hk}(x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})$ è il VOLUME del singolo parallelep.

Definizione 12.2 *Diremo che una funzione f, limitata e nulla fuori di un compatto, è integrabile (secondo Riemann) se*

$$\sup_{\psi \in \mathcal{S}^-} \int \psi \, dxdy = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}^+} \int \varphi dxdy. \qquad [12.1]$$

In questo caso, il valore comune si chiama *integrale* della funzione f e si indica con

$$\int f(x, y) dxdy \quad \text{o più in generale con} \quad \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Una definizione del tutto simile, con le ovvie modifiche del caso, vale nel caso di n variabili.

Osservazione 12.1 A volte le due quantità che compaiono a destra e a sinistra nella [12.1] si chiamano rispettivamente *integrale superiore* e *integrale inferiore* della funzione f:

$$\int^* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}^+} \int \varphi d\mathbf{x}$$

$$\int_* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup_{\psi \in \mathcal{S}^-} \int \psi \, d\mathbf{x}$$

Una funzione f, limitata e con supporto compatto, sarà dunque integrabile se l'integrale superiore è uguale all'integrale inferiore, cioè se risulta

$$\int_* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int^* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \qquad \square$$

N.B. data una funzione limitata A SUPPORTO COMPATTO S sia R un rettangolo che contiene S $(S \subseteq R)$ consideriamo una partizione di R in rettangoli $\{R_{ij}\}_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$

Posso definire una funzione semplice minorante ponendo

$$s(x,y) = \begin{cases} \inf\limits_{(x_1,y_1)\in R_{ij}} f(x_1,y_1) & \text{se } (x_1,y_1) \in R_{ij} \end{cases}$$

N.B. s è costante sul rettangolo R_{ij}

ora $$\int s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \inf_{R_{ij}} (f)\, |R_{ij}| =$$

$$\sum_{ij} \inf(f)\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

(si tratta di una somma inferiore)

Posso definire una funzione semplice maggiorante ponendo

$$S(x,y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,y_1)\in R_{ij}} (f(x_1,y_1)) & \text{se } (x,y) \in R_{ij} \end{cases}$$

ora $$\int S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sup_{R_{ij}}(f)\,|R_{ij}| =$$

$$\sum_{ij} \sup_{R_{ij}}(f)\,(x_i - x_{i-1})(\cancel{y}_j - y_{j-1})$$

avremo che

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f, limitata e nulla fuori di un compatto, sia integrabile, è che per ogni $\varepsilon > 0$ *esistano una funzione semplice maggiorante* φ *e una minorante* ψ *tali che*

$$\int \varphi\, dxdy - \int \psi\, dxdy < \varepsilon.$$

□

in particolare $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una partizione di R $\{R_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

tale che

$$\int S\, dxdy - \int s\, dxdy < \varepsilon$$

(dove S e s sono le funzioni semplici superiore ed inferiore definite sopra

Misura di Peano - Jordan

Definizione 12.3 *Un insieme limitato E si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se la sua funzione caratteristica φ_E è integrabile. In questo caso definiamo* misura *di E il numero*

$$\mathrm{m}(E) = \int \varphi_E \, d\mathbf{x}.$$

Quindi per def. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$

due funzioni semplici ψ e φ, con $\psi \leqslant \varphi_E \leqslant \varphi$, tali che

$$\int \varphi \, d\mathbf{x} - \int \psi \, d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

scegliamo SEMPRE funzioni costruite come sopra (usando l'inf o il sup in ciascun rettangolo) di $\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \cap E \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \cap E = \emptyset \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \subseteq E \\ 0 & \text{se } x \in R_{ij} \text{ e } R_{ij} \not\subseteq E \end{cases}$$

$S(x) = 0$ su R_{24}

$s(x) = 0$

$S(x) = 1$ su R_{14}

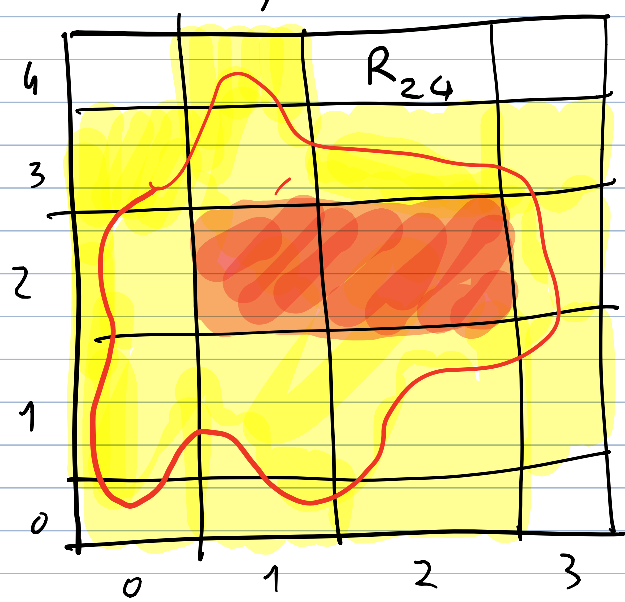
$s(x) = 0$

$S(x) = 1$ su R_{22}

$s(x) = 1$

in giallo $\int S$

in rosso $\int s$



$$\int S\,dxdy = \sum_{R_{ij} \cap E \neq 0} |R_{ij}|$$

$$\int s\,dxdy = \sum_{R_{ij} \subseteq E} |R_{ij}|$$

quindi $$\int S\,dx\,dy - \int s\,dx\,dy = \sum_{\substack{R_{ij} \cap E \neq \emptyset \\ R_{ij} \not\subseteq E}} |R_{ij}|$$

Così facendo, l'integrale di φ sarà la somma delle misure dei rettangoli R_{hk} che hanno punti in comune con E, mentre l'integrale di φ sarà la somma delle misure dei rettangoli R_{hk} contenuti in E. La differenza tra i due integrali sarà allora la somma delle misure dei rettangoli che hanno punti in comune con E ma non sono contenuti in E, cioè dei rettangoli che hanno punti in comune con la frontiera di E.

Chiamiamo ora *plurirettangolo* l'unione P di un numero finito di rettangoli R_i senza punti comuni; e misura di P la somma delle misure dei rettangoli che lo compongono. Avremo allora:

Proposizione 12.1 *Un insieme limitato E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un plurirettangolo P contenuto in E e un plurirettangolo Q che contiene E, tali che* $\mathrm{m}(Q) - \mathrm{m}(P) < \varepsilon$.

Se E è misurabile, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{m}(E) &= \inf\{\mathrm{m}(Q),\ Q \text{ plurirettangolo},\ Q \supset E\} = \\ &= \sup\{\mathrm{m}(P),\ P \text{ plurirettangolo},\ P \subset E\}.\end{aligned}$$

Dimostrare per esercizio. Notare che

$$\int S\,dx\,dy - \int s\,dx\,dy = \sum_{\substack{R_{ij} \cap E \neq \emptyset \\ R_{ij} \not\subseteq E}} |R_{ij}|$$

area di un plurirettangolo che contiene la frontiera!

si può dunque concludere che

un insieme E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo Z che contiene la frontiera ∂E, con $\mathrm{m}(Z) < \varepsilon$,

e dunque che

un insieme E è misurabile (secondo Peano-Jordan) se e solo se la sua frontiera ∂E ha misura nulla.

Teorema 12.1 *Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione continua in un rettangolo chiuso R, e sia E un insieme misurabile contenuto in R. Allora f è integrabile in E.*

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che la funzione $f\varphi_E$ è integrabile.

Per il teorema di Weierstrass, la funzione f è uniformemente continua in R; pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se si suddivide R in rettangoli R_{hk} di diametro minore di δ, risulta in ognuno di essi:

$$M_{hk} - m_{hk} = \sup_{R_{hk}} f - \inf_{R_{hk}} f < \varepsilon.$$

Inoltre f ha in R massimo e minimo, che indicheremo con M e m.

D'altra parte l'insieme E è misurabile, e dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione di R in rettangoli R_{hk}, che potremo supporre di diametro minore di δ, tale che la somma delle misure di quelli che hanno almeno un punto in comune con ∂E sia minore di ε.

Ciò premesso, osserviamo che i rettangoli R_{hk} della suddivisione in questione si possono ripartire in tre classi $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{F}$ mettendo in $\mathfrak{I}$ tutti quelli che sono contenuti all'interno di E, in $\mathfrak{F}$ quelli che hanno almeno un punto in comune con la frontiera ∂E, e infine in $\mathfrak{E}$ tutti gli altri, cioè quelli che non hanno punti in comune né con E né con ∂E.

Chiameremo "interni" i rettangoli di $\mathfrak{I}$, "esterni" quelli di $\mathfrak{E}$, e "di frontiera" quelli di $\mathfrak{F}$. Per quanto detto sopra, la somma delle misure dei rettangoli di frontiera è minore di ε:

$$\sum_{R_{hk} \in \mathfrak{F}} \mathrm{m}(R_{hk}) < \varepsilon.$$

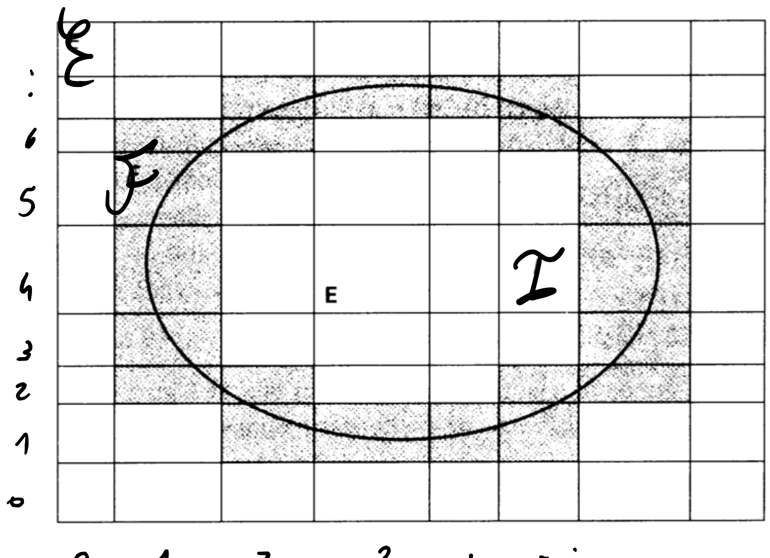


Figura 12.3

$$\int_E f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int f(\vec{x})\varphi_E(\vec{x})\, d\vec{x}$$

funzione caratteristica di E.

Costruiamo somme superiori e inferiori con questa partizione

$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \sum_i \sum_j \sup_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1)\,\varphi_E(x_1,y_1) \right) |R_{ij}| =$$

Se $R_{ij} \in \mathcal{E} \Rightarrow \varphi_E(x_1,y_1) = 0 \quad \forall (x_1,y_1) \in R_{ij}$

se $R_{ij} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{I}$ allora

$$\sup_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1)\,\varphi_E(x_1,y_1) \right) = \sup_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1) \right)$$

$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{I}} \sup_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1) \right) |R_{ij}|$$

$$\int s(x,y)\,dx\,dy = \sum_i \sum_j \inf_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1)\, \varphi_E(x_1,y_1) \right) |R_{ij}|$$

se $R_{ij} \in \mathcal{F} \Rightarrow \inf\limits_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1)\, \varphi_E(x_1,y_1) \right) = 0$

se $R_{ij} \in \mathcal{I}$ allora $\varphi_E(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in R_{ij}$

$$\int s(x,y)\,dx\,dy = \sum_{\mathcal{I}} \inf_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1) \right)$$

$$\int \left(S(x,y) - s(x,y) \right) dx\,dy = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{F}} \sup_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1) \right) |R_{ij}|$$

$$+ \sum_{R_{ij} \in \mathcal{I}} \left[\sup \left(f(x_1,y_1) \right) - \inf_{R_{ij}} \left(f(x_1,y_1) \right) \right] |R_{ij}|$$

$\longrightarrow < \varepsilon$ dato che f è integrabile

$$\left| \int \left(S(x,y) - s(x,y) \right) dx\,dy \right| \leq M \sum_{R_{ij} \in \mathcal{F}} |R_{ij}| +$$

$$\varepsilon \sum_{\mathcal{I}} |R_{ij}|$$

ma E è limitato $\Rightarrow \sum\limits_{\mathcal{I}} |R_{ij}| = m(\mathcal{I}) \leq m(E)$

inoltre E è misurabile $\Rightarrow \sum_{\mathcal{F}} |R_{ij}| < \varepsilon$

$$= \left| \int \left(g(x,y) - f(x,y) \right) dxdy \right| < \varepsilon M + \varepsilon \, m(E) \qquad \blacksquare$$