(Elemento di) Superficie regolare (parametrica)

$$\varphi : K \to \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \to \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \\ \varphi_3(u,v) \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ φ è $C^1(K)$

REM. $C^1(K)$ con K chiuso vuol dire che la funzione è $C^1(A)$ con A aperto $K \subseteq A$

$\boxed{2}$ φ è iniettiva su $\mathring{K}$

$\boxed{3}$ $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$ (questo è il vettore normale)

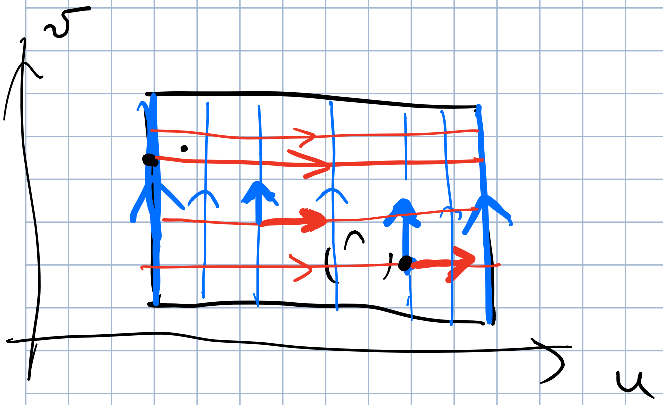
<u>Nota bene</u>: dato che φ è $C^1(K)$

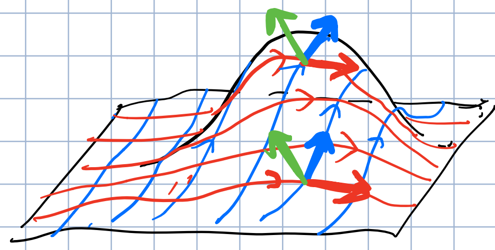
φ_u, φ_v sul bordo sono ben definite

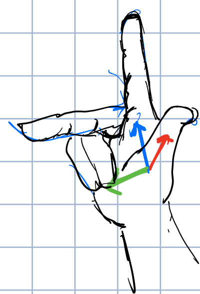
inoltre se $(u_0, v_0) \in \partial K$ vale

$$\lim_{\substack{(u,v) \to (u_0,v_0) \\ \cap K}} \varphi_u = \varphi_u(u_0, v_0) \quad [\text{idem} \times \varphi_v]$$

(questa è la continuità delle derivate)

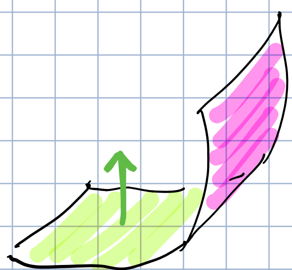




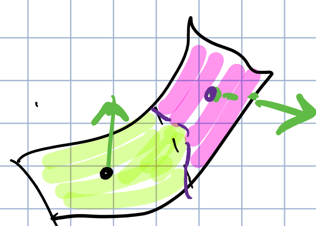


(REGOLA DELLA MANO DESTRA)

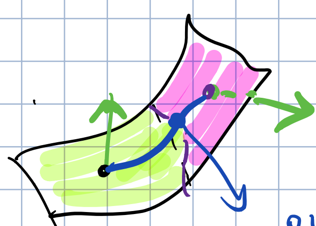
Una parametrizzazione ... è
INIETTIVA FINO AL BORDO
dà una "orientazione" cioè mi definisce
in modo coerente la "parte di sopra"
della superficie



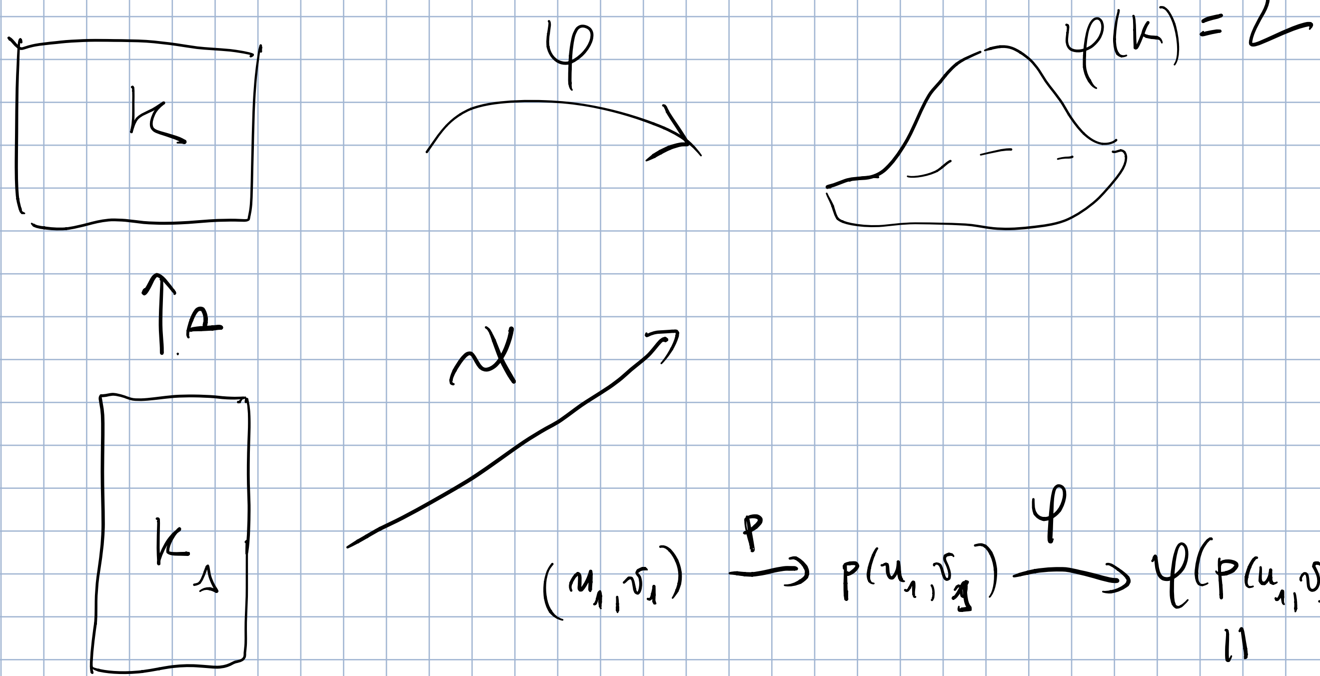
UNA situazione così →



NON è possibile
per la CONTINUITÀ del
vettore normale rispetto a
(u, v)



Naturalmente due parametrizzazioni equivalenti possono dare orientamenti diversi:



$$(u_1, v_1) \xrightarrow{p} p(u_1, v_1) \xrightarrow{\varphi} \varphi(p(u_1, v_1)) = \psi(u_1, v_1)$$

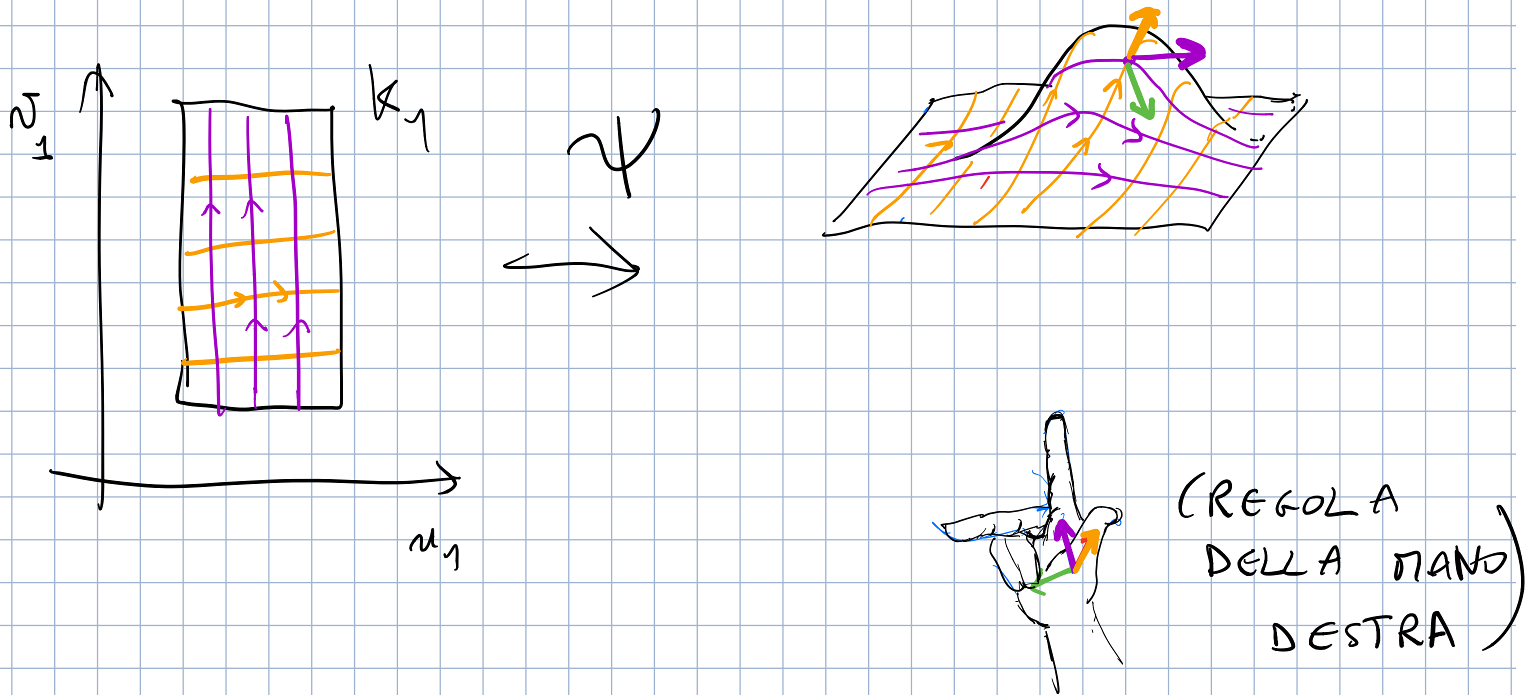
$$(u, v) = p(u_1, v_1)$$

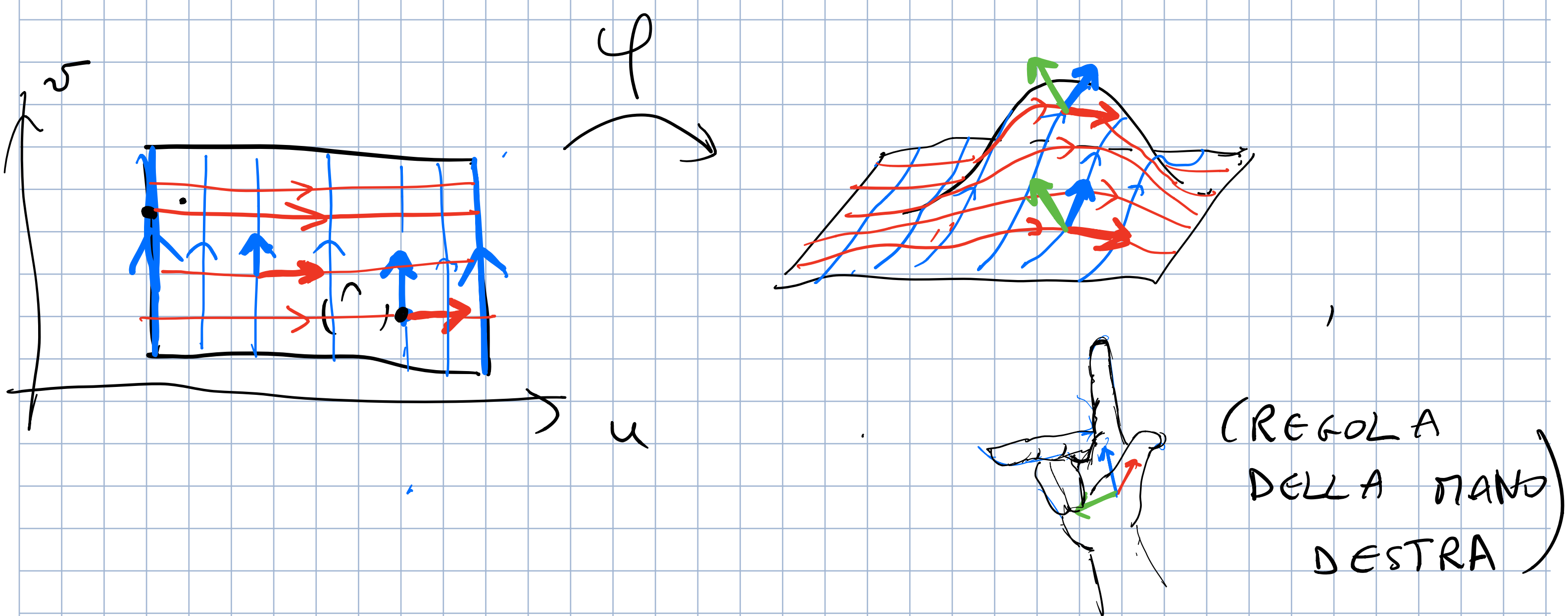
$$p \quad \begin{cases} u = u(u_1, v_1) \\ v = v(u_1, v_1) \end{cases}$$

p è C^1 assieme alla sua inversa

è 1 a 1 $\quad \det(Jp) \neq 0 \quad \forall\, (u_1, v_1) \in \mathring{K}_1$

[REM C^1 di un chiuso vuol dire C^1 di un aperto che contiene è chiuso]





DOMANDA: come si vede se due parametrizzazioni danno lo stesso orientamento ?

PARAMETRIZZAZIONI NON INIETTIVE SUL BORDO

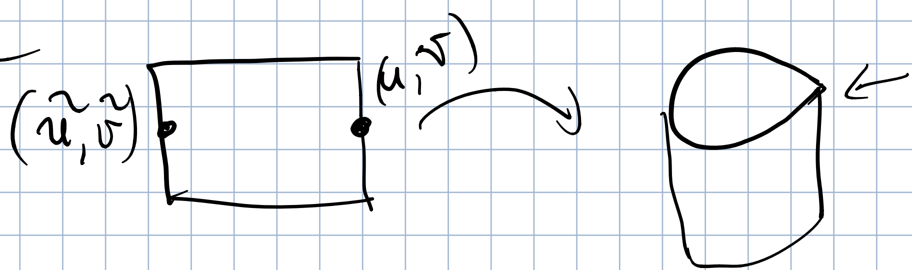
Se φ NON è iniettiva sul bordo cioè se $\exists\, (u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \in \partial K$ (diversi tra loro) $\varphi(u,v) = \varphi(\tilde{u},\tilde{v})$

NON è detto che $\varphi_u(u,v) = \varphi_u(\tilde{u},\tilde{v})$

(stesso per φ_v) inoltre

NON è detto che $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u,v) = (\varphi_u \wedge \varphi_v)(\tilde{u},\tilde{v})$

Basta pensare ad un esempio della forma

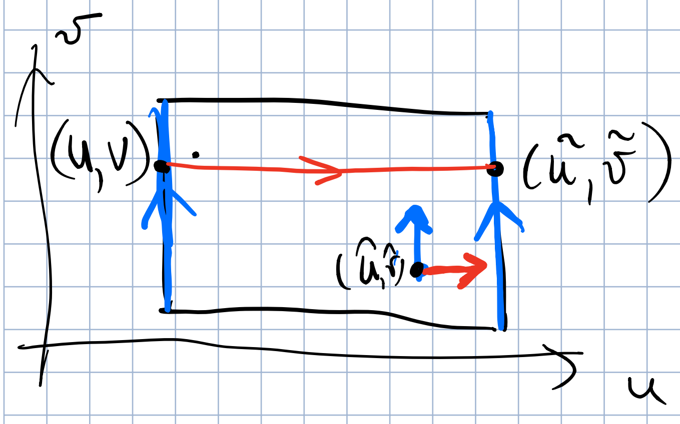


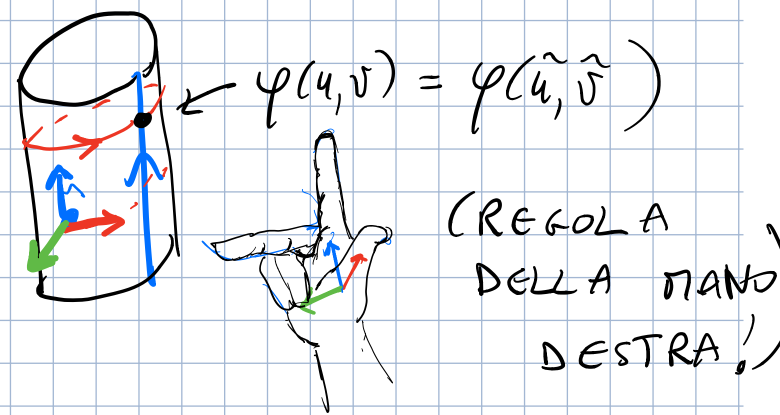
ho uno spigolo

Se $\forall$ coppie $(u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \in \partial K$ t.c.

$\varphi(u,v) = \varphi(\tilde{u},\tilde{v})$ si ha $\hat{n}(u,v) = \pm\, \hat{n}(\tilde{u},\tilde{v})$

[il versore normale è uguale a meno del segno] allora il piano T_S è ben definito fino al bordo



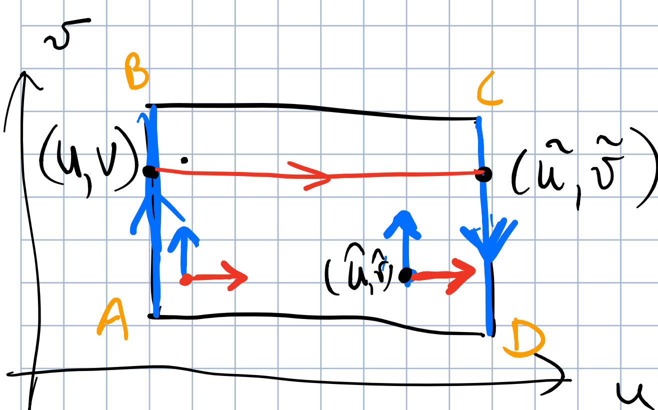


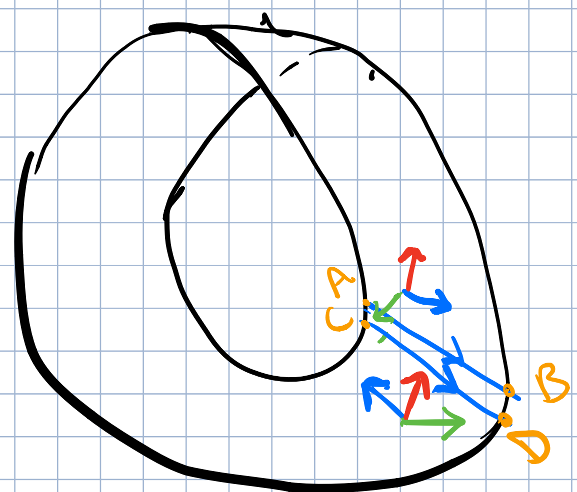
(REGOLA DELLA MANO DESTRA!)

$\varphi(u,v) = \varphi(\tilde{u},\tilde{v})$ e anche $\hat{n}(u,v) = \hat{n}(\tilde{u},\tilde{v})$

in questa parametrizzazione il vettore normale punta FUORI DAL CILINDRO

infatti in un punto interno $(\hat{u},\hat{v})$ il vettore normale $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è il vettore VERDE





$\varphi(u,v) = \varphi(\tilde{u},\tilde{v})$ ma $\hat{n}(u,v) = \hat{n}(\tilde{u},\tilde{v})$

DEF. (ORIENTABILITÀ)

Se $\forall$ coppie $(u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \in \partial K$ t.c.

$\varphi(u,v) = \varphi(\tilde{u},\tilde{v})$ si ha $\hat{n}(u,v) = \hat{n}(\tilde{u},\tilde{v})$

Si dice che φ è orientata

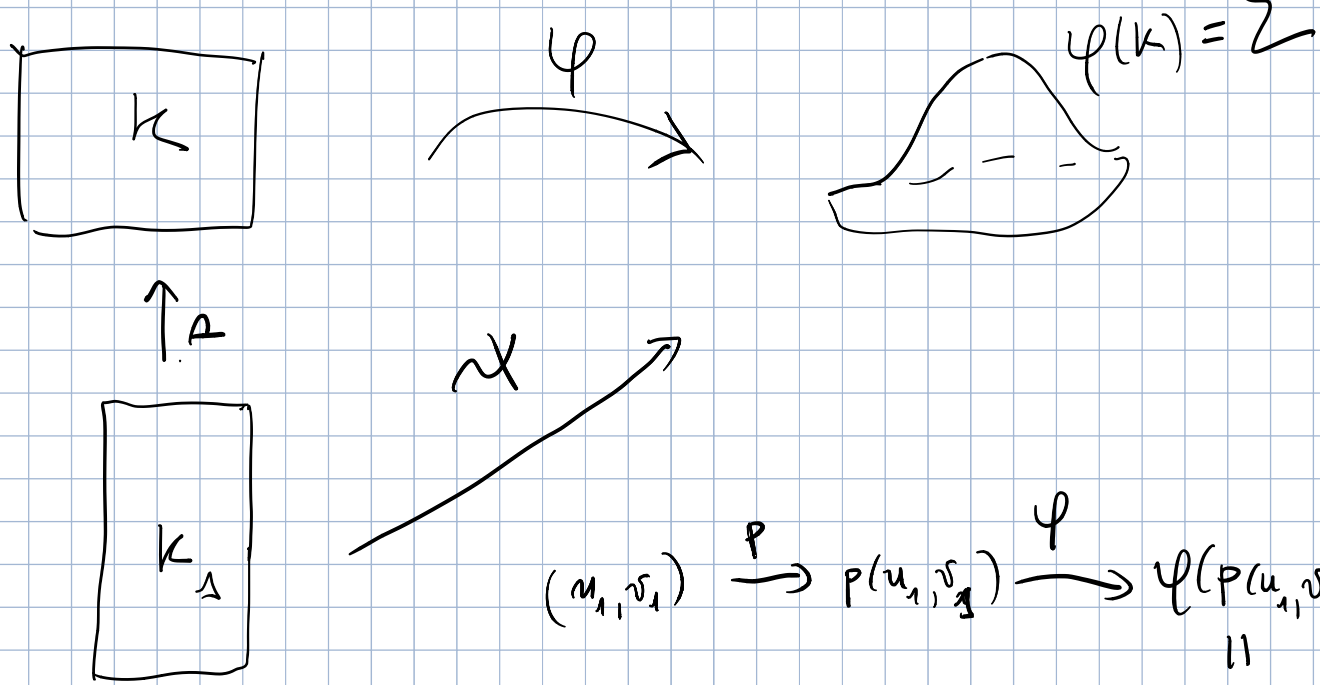
DEFINIZIONE:

Σ superficie in $\mathbb{R}^3$ è orientabile se esiste una parametrizzazione ORIENTATA φ: $\varphi(K) = \Sigma$

[IL nastro di Möebius NON è orientabile]

DOMANDA:

è possibile che date due parametrizz. equivalenti una sia ORIENTATA e l'altra NO?



$$(u_1,v_1) \xrightarrow{p} p(u_1,v_1) \xrightarrow{\varphi} \varphi(p(u_1,v_1)) = \psi(u_1,v_1)$$

$$(u,v) = p(u_1,v_1)$$

$$p \quad \begin{cases} u = u(u_1,v_1) \\ v = v(u_1,v_1) \end{cases}$$

p è C^1 assieme alla sua inversa

è 1 a 1 $\quad \det(Jp) \neq 0 \quad \forall (u_1,v_1) \in K_1$

[REM C^1 di un chiuso vuol dire C^1 di un aperto che contiene il chiuso]

quindi ci sono due casi:

$\boxed{1}$ $\det\left(J_P(u_1, v_1)\right) > 0 \quad \forall (u_1, v_1) \in K_1$

$\boxed{2}$ $\det\left(J_P(u_1, v_1)\right) < 0 \quad \forall (u_1, v_1) \in K_1$

[N.B. è vero anche sul bordo!]

Ricordiamo che per due parametrizz. equivalenti φ e ψ si ha

$$\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1} = (\varphi_u \wedge \varphi_v) \det J_P$$

e il versore normale è

$$\frac{\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1}}{|\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1}|} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \cdot \boxed{\frac{\det J_P}{|\det J_P|}}^{*}$$

CASO 1 $\quad * = 1$

CASO 2 $\quad * = -1$

Se ho due punti (u,v) e $(\tilde{u},\tilde{v})$

su ∂K t.c. $\varphi(u,v) = \varphi(\tilde{u},\tilde{v})$

allora $(u,v) = P(u_1,v_1)$ e

$(\tilde{u},\tilde{v}) = P(\tilde{u}_1,\tilde{v}_1)$ [DIMOSTRARE per esercizio]

con $(u_1,v_1),(\tilde{u}_1,\tilde{v}_1) \in \partial K_1$

quindi $\psi(u_1,v_1) = \psi(\tilde{u}_1,\tilde{v}_1)$.

ORA indico $\hat{n}_\varphi(u,v) = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$

e $\hat{n}_\psi(u_1,v_1) = \dfrac{\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1}}{|\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1}|}$

CASO 1. $\hat{n}_\psi(u_1,v_1) = \hat{n}_\varphi(u,v)$

e $\hat{n}_\psi(\tilde{u}_1,\tilde{v}_1) = \hat{n}_\varphi(\tilde{u},\tilde{v})$

CASO 2. $\hat{n}_\psi(u_1, v_1) = -\hat{n}_\varphi(u, v)$

e $\hat{n}_\psi(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) = -\hat{n}_\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$

in entrambe i casi

se $\hat{n}_\varphi(u, v) = \hat{n}_\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$

allora $\hat{n}_\psi(u_1, v_1) = \hat{n}_\psi(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$