$f_n(x)$ definite per $x \in E$

Definizione 13.1 (convergenza puntuale) *Diremo che la successione di funzioni f_n converge* puntualmente *in E alla funzione f se per ogni $\mathbf{x}_0 \in E$ la successione numerica $f_n(\mathbf{x}_0)$ converge a $f(\mathbf{x}_0)$; cioè se si ha*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)$$

Analogamente, diremo che la serie di funzioni $\sum f_n$ converge puntualmente in E alla funzione f se per ogni $\mathbf{x} \in E$ la successione delle somme parziali

$$s_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} f_k(\mathbf{x})$$

converge a $f(\mathbf{x})$.

Esempio 13.1 La successione

$$f_n(x) = x^n$$

per $x \in [0,1] = E$

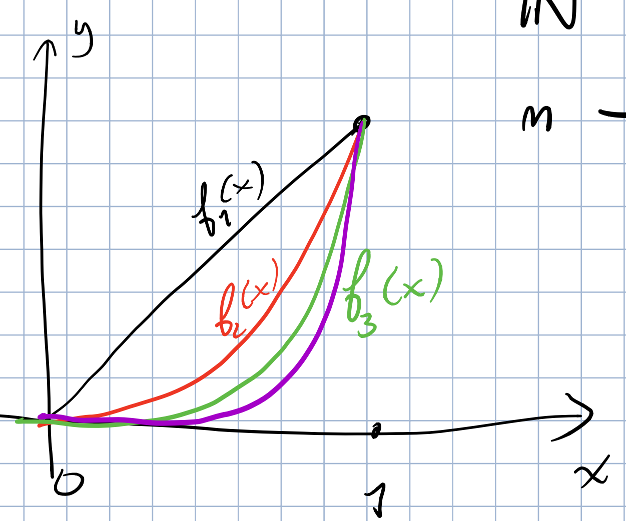
$n = 1, 2, \ldots$

$f_n(x) = x^n$

$\mathbb{N} \to C(E, \mathbb{R})$

$n \to f_n(x)$ con $x \in E$

ho disegnato i grafici di f_1, f_2, f_3, f_4 $\to$



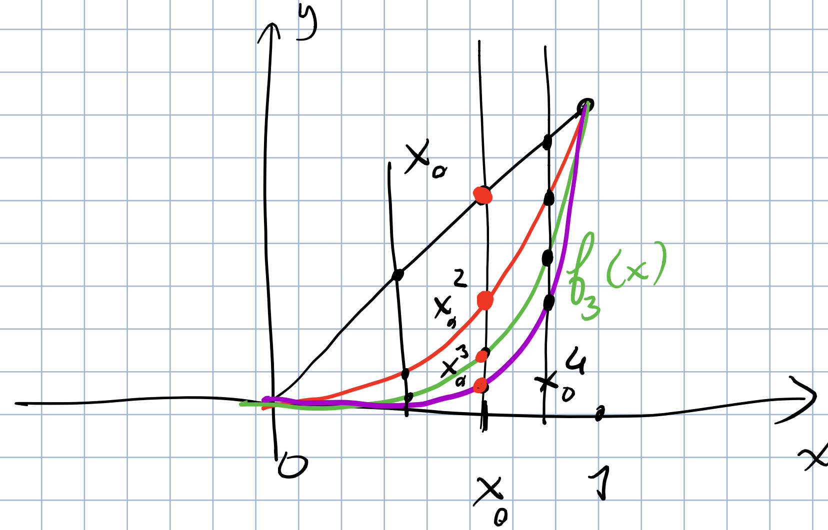
Se fisso $x_0 \in [0,1)$

$n \to f_n(x_0)$

$f_n(x_0) = x_0^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

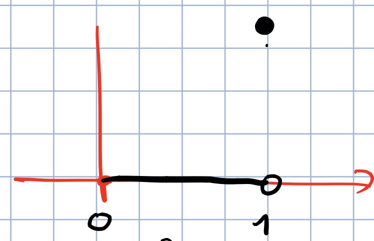
se $x_0 = 1$

$f_n(1) = 1^n \to 1$



quindi $x^n \to f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$f_n(x) \to f(x)$ in $[0,1]$



$x^n \to \infty$ se $x > 1$

(cosa succede in $[-1, 0]$?)

Esempio 13.2 La successione $n \ge 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{se } \dfrac{1}{n} < x \leqslant \dfrac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \dfrac{2}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

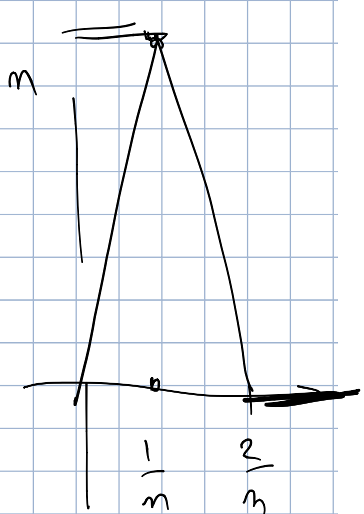
converge puntualmente in $[0, 1]$ alla funzione 0.

fisso $x_0 \in [0,1]$ e denoto con

n_0 un naturale n_0 t.c.

$$\frac{1}{x_0} < \frac{n_0}{2}$$

in modo che $\forall\, n \ge n_0$



$\frac{2}{n} < x_0 \leq 1$ e quindi

$\forall \ n \geq n_0 \quad f_n(x_0) = 0$

quindi $\forall x_0 \ \exists \ n_0 : \forall \ n > n_0$

$| f_n(x_0) - 0 | = 0$

Esercizi

13.1. Calcolare il limite delle seguenti successioni di funzioni di una variabile reale:

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$
2. $\frac{nx}{1 + n^2x^2}$
3. $\frac{x^n}{n + x^{2n}}$
4. $\frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$
5. $\frac{\operatorname{sen} nx}{nx} \ (x \neq 0)$
6. n^x
7. $\frac{x^n + x^{3n}}{1 + x^{2n}}$

13.2. Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ convergono le seguenti serie:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{nx}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + |x|^{n^2}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{x}{n}$

7.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1 - x^{2n})$

1. $|x|$

2. 0

3. 0

4. $\begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & x \ |x| = 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

5. 0 6 $\begin{cases} \infty & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Formalmente $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente x

$$\forall \mathbf{x} \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n > \nu(\varepsilon, x), \quad |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon.$$

È chiaro che il valore di ν dipende, oltre che da ε, anche dal punto $\mathbf{x}$; al cambiare di quest'ultimo varierà anche l'indice ν a partire dal quale la differenza $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|$ è minore di ε. Ad esempio, se come nell'esempio 13.1 si pone $f_n(x) = x^n$, per $0 < x < 1$ risulterà[1] $x^n < \varepsilon$ quando $n \log x < \log \varepsilon$, cioè, essendo $\log x < 0$, quando $n > \boxed{\nu = \dfrac{\log \varepsilon}{\log x}}$. È evidente che in questo caso il numero ν dipende da x, e diventa sempre più grande quanto più x è vicino a 1.

Se invece è possibile trovare un ν che vada bene per ogni $\mathbf{x} \in E$, si dirà che la convergenza è *uniforme* in E. Formalmente, ciò accade se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n > \nu, \forall \mathbf{x} \in E \quad |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon.$$

questo è equivalente a dire che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : \quad \forall n > \nu$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

e ricordando che $\|g\|_{\infty, E} := \sup_E |g(x)|$

conv. uniforme

vuol dire che

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(x) - f(x) \|_{\infty, E} = 0$$

Non è difficile vedere che $\exists$ successioni che convergono puntualmente e NON uniformemente

per esempio $f_n(x) = x^n$ in $[0,1]$

infatti $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0,1) \\ 1 & \text{in } x = 1 \end{cases}$

$$\sup_{[0,1]} | f_n(x) - f(x) | = \sup_{[0,1)} | x^n - 0 | = 1$$

Non tende a zero!

questo dipende fortemente dalla scelta di E (x es)

$E = (0, \delta)$ con $\delta < 1$

$$\sup_{[0,\delta)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,\delta)} |x^n| = \delta^n \to 0$$

Teorema 13.1 *Se una successione di funzioni continue converge uniformemente in E a una funzione f, quest'ultima è continua in E.*

Le ipotesi sono

1. $f_n(x)$ continue in E $\forall n$

$\forall x_0 \in E$
$\forall \varepsilon > 0, \forall n \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0, n) : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$

se $|x - x_0| < \delta$

2. $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) : \forall n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in E$

Voglio dimostrare che

$\forall x_0 \in E, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

se $|x-x_0| < \delta$

fisso $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in E$ e pongo

$$\delta(\varepsilon, x_0) := \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_0, \nu\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)+1\right)$$

infatti se $|x-x_0| < \delta$ [per Hp1]

$\Rightarrow \left| f_{\nu+1}(x_0) - f_{\nu+1}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ inoltre

$$\left| f_{\nu+1}(x) - f(x) \right|, \left| f_{\nu+1}(x_0) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

[per Hp 2]

quindi se $|x-x_0| < \delta$

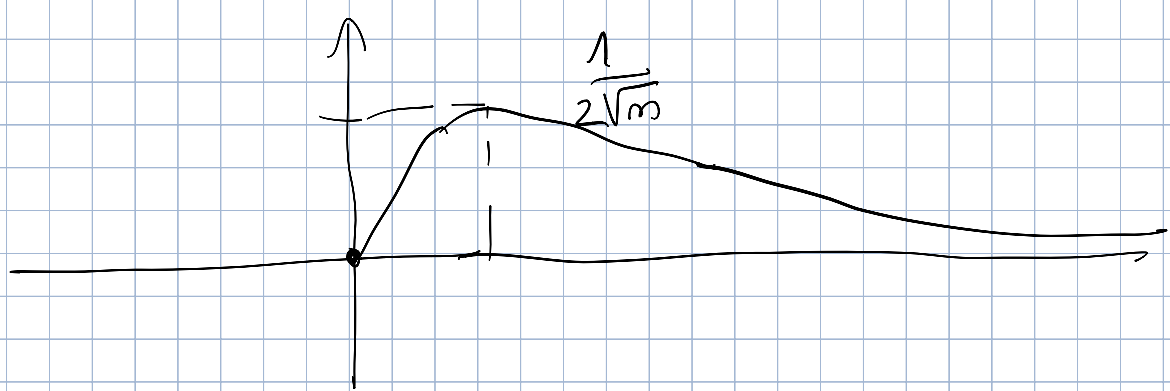
$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \left| f(x) - f_{\nu+1}(x) + f_{\nu+1}(x) - f_{\nu+1}(x_0) + f_{\nu+1}(x_0) \right| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

delle seguenti su

3. $\frac{x^n}{n+x^{2n}} \to 0 \qquad \forall \; x \in \mathbb{R}$

calcoliamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{n+x^{2n}} \right| = \frac{\sqrt{n}}{2n} \to 0$$



$$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}}{n+x^{2n}} - \frac{x^n \cdot (2n)\, x^{2n-1}}{(n+x^{2n})^2}$$

$$= n x^{n-1} \left[(n+x^{2n}) - 2 x^{2n} \right] = 0$$

$$x^{2n} = n \rightsquigarrow x = n^{\frac{1}{2n}}$$

13.2. Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ convergono le seguenti serie:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{nx}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^{n^2}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{x}{n}$

7.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-x^{2n})$

1. $-1 \leq x-1 < 1 \iff 0 \leq x < 2$

2. $\sum \frac{1}{n^{x-1}}$ $\quad x-1 > 1$

3 $|x|^x < 1 \quad x \ln|x| < 0 \quad x < -1$

$0 < x < 1$

$$\sum \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n} \geq \sum_{n=m^2} \frac{|x|^m}{m^2}$$ quindi se $|x| > 1$ Diverge

d'altro canto se $|x| < 1$

$\frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n} < \frac{1}{n^{3/2}}$ definitivamente in n.

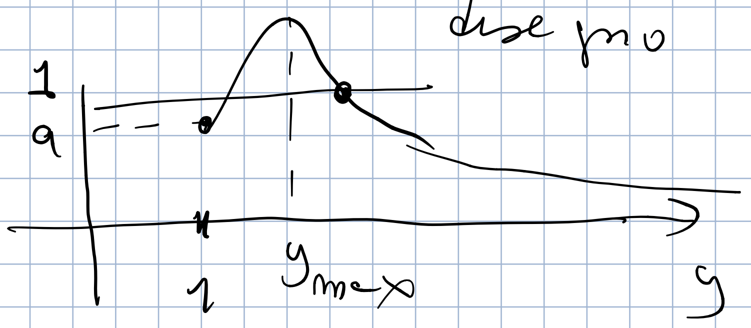
$\sqrt{n}$ $\quad 1$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$y = \sqrt{n} \qquad 0 < |x| = a < 1$$

$y\, a^y < 1$ per $y \geq$ sufficientemente grande

disegno $f(y) = y\, a^y$ per $y \geq 1$



$$f'(y) = a^y + y \ln a \, a^y = a^y (1 + y \ln a) = 0$$

$$y_{max} = -\frac{1}{\ln a} \; (>0) \qquad f(y_{max}) = -\frac{1}{e \ln a}$$

Quindi converge per $|x| < 1$

Lemma 13.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f sia integrabile in un insieme E è che per ogni $\varepsilon > 0$ esistano due funzioni h e g, integrabili in E, con $h(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, e tali che*

$$\int_E g(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) - \int_E h(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \varepsilon. \qquad [13.2]$$

(viene direttamente dalla definizione tramite le funzioni semplici e integrabili.

Teorema 13.2 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Se una successione f_n di funzioni integrabili in un insieme limitato E converge uniformemente a una funzione $f(\mathbf{x})$, allora f è integrabile in E e si ha*

$$\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \qquad [13.3]$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad$ se $n > \nu$

fisso $n = \nu + 1$

quindi $\underbrace{f_n(x) - \varepsilon}_{h(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{f_n(x) + \varepsilon}_{g(x)}$

ora (dato che E è limitato)

$$\int_E (g(x) - h(x)) = \int_E 2\varepsilon \, dx = 2\varepsilon \, m(E)$$

dato che ε è arbitrario $f(x)$ è integrabile. inoltre $\forall \varepsilon \; \exists \nu$:

$$\int_E f_n(x) - \varepsilon m(E) \leq \int_E f(x) \leq \int_E f_n(x) + \varepsilon m(E)$$

$\forall n > \nu$ quindi

$$\int_E f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)$$