Definizione: (Integrale superficiale)

data una superficie regolare $\Sigma = \varphi(K)$

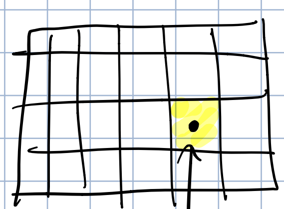
ed una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_\Sigma f(x,y,z)\,dS := \int_K f(\varphi(u,v))\,|\varphi_u \wedge \varphi_v|\,du\,dv$$

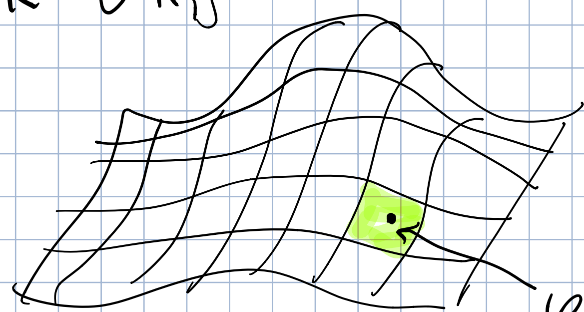
$|\varphi_u \wedge \varphi_v|\,du\,dv =: dS$ è "l'elemento d'area"

IDEA INTUITIVA

faccio una partizione $K = \bigcup R_{ij}$



(u^*_{ij}, v^*_{ij})



$\varphi(u^*_{ij}, v^*_{ij})$

R_{ij} in giallo $\qquad$ $\varphi(R_{ij})$ in verde

Per definizione di integrale di Riemann in $\mathbb{R}^2$

$$\int_K f(\varphi(u,v))|\varphi_u \wedge \varphi_v|\,du\,dv \approx \sum_{ij} f(\varphi(u^*_{ij}, v^*_{ij}))\,|\varphi_u \wedge \varphi_v(u^*_{ij}, v^*_{ij})|\,|R_{ij}|$$

area del rettang

RETT. Nella lezione precedente abbiamo visto che nell'integrazione su superfici l'idea è di approssimare l'area di $\varphi(R_{ij})$ con l'area di un parallelogramma di lati $\varphi_u\,\delta u$, $\varphi_v\,\delta v$ in modo che

$$|\varphi(R_{ij})| \approx |\varphi_u \wedge \varphi_v|\,\delta u\,\delta v = |\varphi_u \wedge \varphi_v|\,|R_{ij}|$$

in conclusione

$$\int_K f(\varphi(u,v))|\varphi_u \wedge \varphi_v|\,du\,dv \approx \sum_{ij} f(\varphi(u^*_{ij}, v^*_{ij}))|\varphi_u \wedge \varphi_v(u^*_{ij}, v^*_{ij})|\,|R_{ij}|$$

$$\approx \sum_{ij} f(\varphi(u^*_{ij}, v^*_{ij}))\,|\varphi(R_{ij})|$$

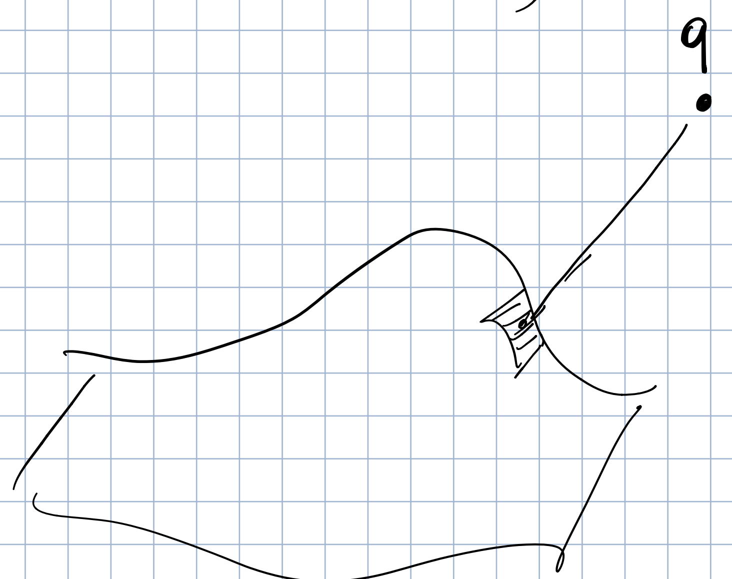
← "area" dell'immagine del rettangolo

Esempio

3. $\displaystyle\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 y}}\,d\sigma$, dove Σ è la porzione di superficie di equazioni $x = u\cos v$, $y = v$, $z = \cos v$, $0 \leq v \leq u$, $0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Può essere utilizzato per calcolare la massa (oppure il baricentro oppure il momento di inerzia) di una superficie su cui si distribuisce una densità superficiale di massa.

(Anche nel caso di campi elettrici si usa un caso di densità superficiale di carica.)



$$V(x_0, y_0, z_0) = \int \frac{q\rho \, dS}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

Superfici regolari a tratti

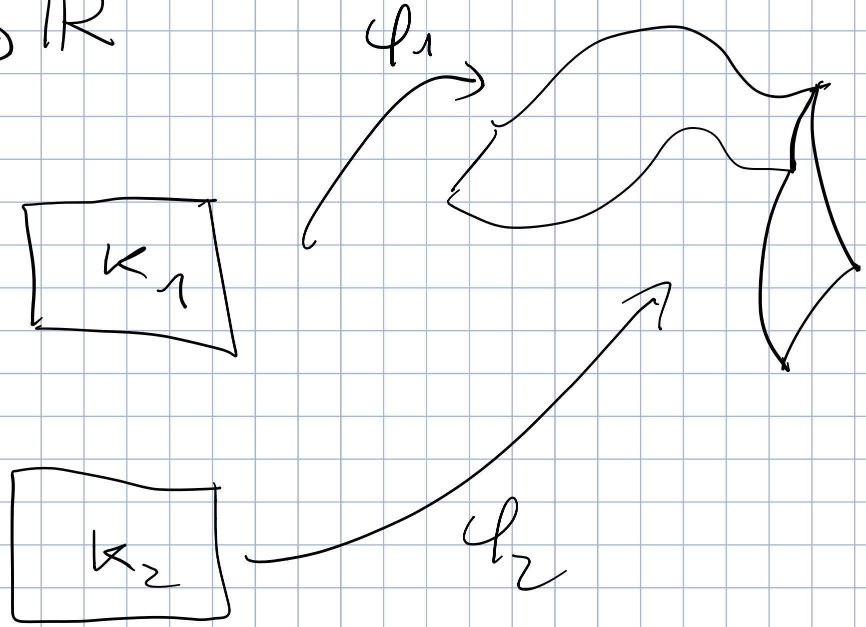
sono unione di un numero finito di sup. regolari

$$K_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{R}^3 \qquad \varphi_i(\mathring{K}_i) \cap \varphi_j(\mathring{K}_j) = \emptyset$$

$$K_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{R}^3$$

$$\vdots$$

$$K_m \xrightarrow{\varphi_m} \mathbb{R}^3$$



questa è una superficie regolare a tratti (se posso scegliere l'orientamento in modo che sia coerente in tutte le φ_i allora la superficie è

ORIENTABILE)

Spesso consideriamo superfici REGOLARI A TRATTI che sono il BORDO di un dominio in $\mathbb{R}^3$.

In particolare consideriamo domini D definiti da una o più disequazioni

Esem.:

$$D: \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2 ; 0 \leq z \leq 1 \}$$

il bordo ∂D è composto da due superfici regolari

① $\partial D_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1 \}$

② $\partial D_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 ; z = 1 \}$

Altro esempio

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 2-(x^2+y^2) \geq z \geq x^2+y^2 \}$$

Se Σ è il bordo di un dominio D $\quad \Sigma = \partial D$

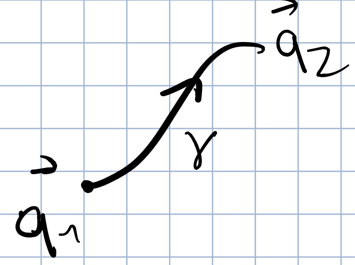
Σ è sempre orientabile infatti posso dividere $\mathbb{R}^3$ in interno e D e esterno e scegliere una param. che punti (x esempio) verso l'esterno.

Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva

Consideriamo un campo vettoriale $F = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^3$

$F : C(A, \mathbb{R}^3)$

Consideriamo una curva γ in $\mathbb{R}^3$ orientata.



supponiamo che γ abbia una parametrizzazione regolare

$$[a,b] \xrightarrow{\varphi} A \qquad \varphi(A) = \gamma \quad : \quad \varphi(a) = \vec{q}_1, \quad \varphi(b) = \vec{q}_2$$

DEFINISCO IL LAVORO di F lungo $\gamma, +$ (da P_1 a P_2)

$$\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

REM.

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

LEMMA. Siano $\varphi(t)$ e $\psi(\tau)$ due $+$ parametrizzazioni EQUIORIENTATE

$$\begin{array}{l} [a,b] \xrightarrow{\varphi} \gamma \\ p \uparrow \\ [c,d] \xrightarrow{\psi} \gamma \end{array} \qquad \psi(c) = P_1, \quad \psi(d) = P_2$$

allora

$$\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt = \int_c^d F(\psi(\tau))\, \dot{\psi}(\tau)\, d\tau$$

Questo vuol dire che il lavoro di un campo vettoriale NON dipende dalla parametrizzazione ma solo del sostegno γ e dell'orientamento!

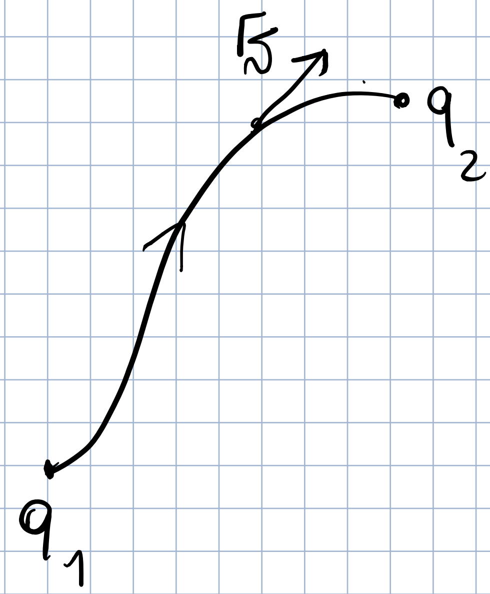
$$\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt = \int_{\gamma_1(q_1, q_2)} F \cdot \hat{v}\, d\ell$$

[Rem. ℓ è l'ascissa curvilinea e

$d\ell = |\dot{\varphi}(t)|dt \qquad \hat{v} = \dfrac{\dot{\varphi}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|}$]

Corollario: se φ e ψ NON sono equiorientate il lavoro cambia di segno.

$$\int_{\gamma_1(q_1,q_2)} \bar{F}\cdot\hat{v}\,d\ell = -\int_{\gamma_1(q_2,q_1)} \bar{F}\cdot\hat{v}\,d\ell$$



16.2. Calcolare il lavoro del campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ lungo la circonferenza di equazioni $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata.

Sia Σ una superficie regolare orientata e sia $\varphi : K \longrightarrow \Sigma$ una parametrizzazione regolare compatibile con l'orientamento

Definisco il flusso di F attraverso φ come

$$\int_K F(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)\, du\, dv$$

Dato che $|\varphi_u \wedge \varphi_v|\, du\, dv = dS$ (elemento d'area) e $\dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} = \hat{n}$

(versore normale)

la definizione è intrinseca

Sia ψ una parametrizzazione equivalente ed EQUIORIENTATA

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\varphi"] & \Sigma \\
K_1 \arrow[u, "p"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$\psi(u_1, v_1) = \varphi(p(u_1, v_1))$$

$$\int_{K_1} F(\psi(u_1, v_1)) \cdot (\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1}) \, du_1 \, dv_1 =$$

$$= \int_K F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) \, du \, dv$$

Dimostrare x esercizio

(vedere lezione precedente)

Esercizio

Sia $F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e sia

Σ la sfera UNITARIA

$$\Sigma = \{ (x,y,z) : \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \}$$

calcolare il flusso uscente di F

attraverso Σ.

(parametrizzazione che punta verso l'esterno)

ho sbagliato orientamento!

scambio u e v

$$\begin{cases} x(u,v) = \sin u \cos v & 0 \leq u \leq \pi \\ y(u,v) = \sin u \sin v & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z(u,v) = \cos u \end{cases}$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \sin u \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$= \sin u \cdot \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \quad ; \quad |\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sin u$$

$$\int_K \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \sin u \; du \, dv =$$

$$\int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} dv \; \sin u = 4\pi$$

Esercizio 2. $\quad \vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$