$f_n(x)$ definite per $x \in E$

Definizione 13.1 (convergenza puntuale) *Diremo che la successione di funzioni f_n converge* puntualmente *in E alla funzione f se per ogni $\mathbf{x}_0 \in E$ la successione numerica $f_n(\mathbf{x}_0)$ converge a $f(\mathbf{x}_0)$; cioè se si ha*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)$$

Analogamente, diremo che la serie di funzioni $\sum f_n$ converge puntualmente in E alla funzione f se per ogni $\mathbf{x} \in E$ la successione delle somme parziali

$$s_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} f_k(\mathbf{x})$$

converge a $f(\mathbf{x})$.

Esempio 13.1 La successione

$$f_n(x) = x^n$$

per $x \in [0,1]$ $= E$

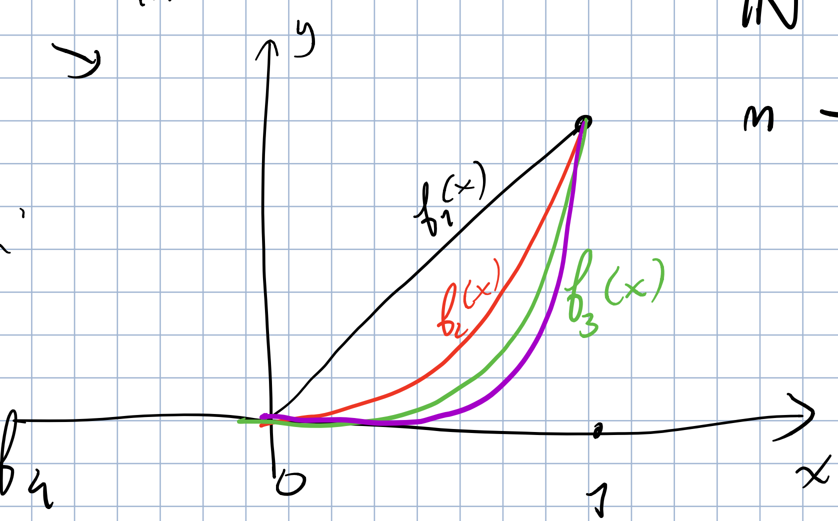
$n = 1, 2, \ldots$

$f_n(x) = x^n$

$\mathbb{N} \to C(E, \mathbb{R})$

$n \to f_n(x)$ con $x \in E$

ho disegnato i grafici di f_1, f_2, f_3, f_4 →



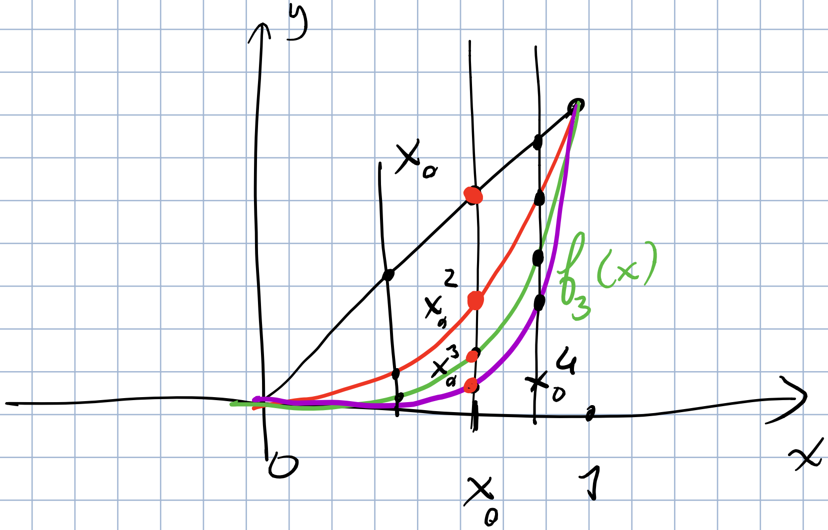
$n \to f_n(x_0)$

Se fisso $x_0 \in [0,1)$

$$f_n(x_0) = x_0^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

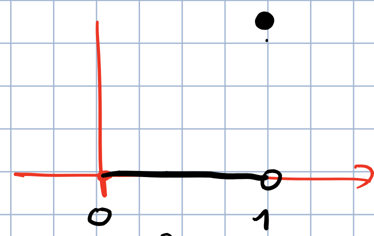
se $x_0 = 1$

$$f_n(1) = 1^n \to 1$$



quindi $x^n \to f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$f_n(x) \to f(x)$ in $[0,1]$



$x^n \to \infty$ se $x > 1$

(cosa succede in $[-1, 0]$?)

Esercizi

A

13.1. Calcolare il limite delle seguenti successioni di funzioni di una variabile reale:

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$
2. $\dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$
3. $\dfrac{x^n}{n + x^{2n}}$
4. $\dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$
5. $\dfrac{\operatorname{sen} nx}{nx}\ (x \neq 0)$
6. n^x
7. $\dfrac{x^n + x^{3n}}{1 + x^{2n}}$

13.2. Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ convergono le seguenti serie:

B

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{nx}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + |x|^{n^2}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{x}{n}$

7.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1 - x^{2n})$

(A)

1. $|x|$

2. 0

3. 0

4. $\begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

5. 0

6. $\begin{cases} \infty & x > 0 \\ 1 & x \to 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(B)

1. $-1 \leq x - 1 < 1 \iff 0 \leq x < 2$

2. $\sum \frac{1}{n^{x-1}}$ $\quad x - 1 > 1$

3. $|x|^x < 1$ $\quad x \ln|x| < 0$ $\quad x < -1$
$0 < x < 1$

(4) $\sum \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n} \geq \sum_{n=m^2} \frac{|x|^m}{m^2}$ quindi se $|x| > 1$
Diverge

d'altro canto se $|x| < 1$

$\frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n} < \frac{1}{n^{3/2}}$ definitivamente in

n

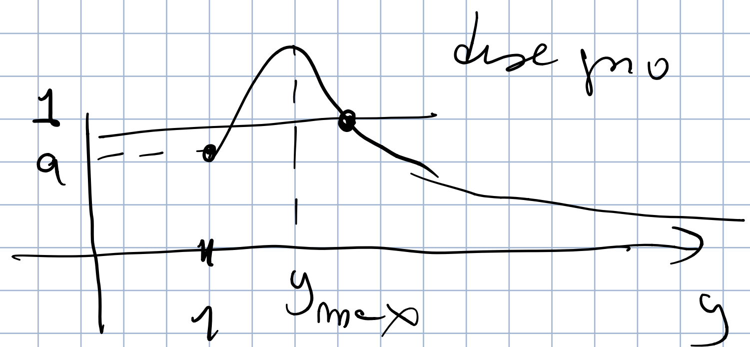
$$|x|^{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$y = \sqrt{n} \qquad 0 < |x| = a < 1$$

$y\, a^{y} < 1$ per $y \geq$ sufficientemente grande

disegno

$f(y) = y a^{y}$ per $y \geq 1$



$$f'(y) = a^{y} + y \ln a \; a^{y} = a^{y}(1 + y \ln a) = 0$$

$$y_{max} = -\frac{1}{\ln a} (>0) \qquad f(y_{max}) = -\frac{1}{a e \ln a}$$

Quindi converge per $|x| < 1$

e

Formalmente $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente ~~$\forall$~~ in E

$\forall\, \varepsilon > 0,\ x \in E \quad \exists N(x,\varepsilon)$: se $n \geq N(x,\varepsilon)$ allora

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

per esempio $\quad f_n(x) = x^n \quad x \in [0,1]$

se $x \neq 0,1$ $N = N(x,\varepsilon)$ è tale che

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n| = x^n < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N(x,\varepsilon)$$

quindi

$$x^n < \varepsilon \rightsquigarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{x^n} \rightsquigarrow n \ln\left(\frac{1}{x}\right) > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

cioé $\quad n > \dfrac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$ quindi $N(\varepsilon, x) = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} + 1$

CONVERGENZA UNIFORME

$f_n(x)$ converge UNIFORMEMENTE a $f(x)$ in E se

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

questo è equivalente a dire che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : \quad \forall n > \nu$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

e ricordando che $\|g\|_{\infty, E} := \sup_E |g(x)|$

conv. uniforme

vuol dire che

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(x) - f(x) \|_{\infty, E} = 0$$

Non è difficile vedere che $\exists$

successioni che convergono puntualmente

NON uniformemente

per esempio $f_n(x) = x^n$ in $[0,1]$

infatti $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0,1) \\ 1 & \text{in } x=1 \end{cases}$

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1)} |x^n - 0| = 1$$

Non tende a zero!

questo dipende fortemente dalla scelta di E. $x^n \to 0$ unif.

in $E = (-\delta, \delta)$ $\forall\, \delta < 1$

$$\sup_{[0,\delta)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{(-\delta,\delta)} |x^n| = \delta^n$$

$$\downarrow$$

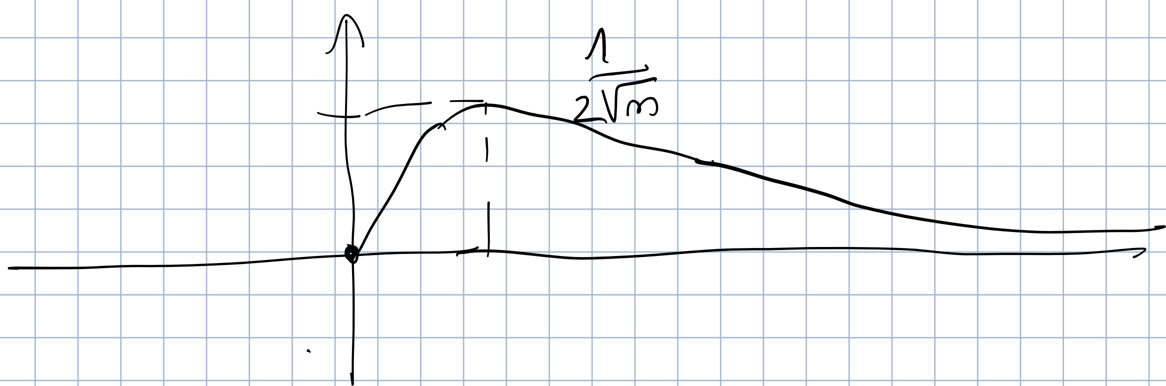
$$0$$

Esempio

$$\frac{x^n}{n+x^{2n}} \to 0 \qquad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

calcoliamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{n+x^{2n}} \right| =$$



cerco il punto critico

$$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}}{n+x^{2n}} - \frac{x^n \cdot (2n)\, x^{2n-1}}{(n+x^{2n})^2}$$

$$= n x^{n-1} \left[(n+x^{2n}) - 2\, x^{2n} \right] = 0$$

$$x^{2n} = n \rightsquigarrow x = n^{\frac{1}{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{x^n}{n+x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2n} = 0$$

Teorema 13.1 *Se una successione di funzioni continue converge uniformemente in E a una funzione f, quest'ultima è continua in E.*

Le ipotesi sono

1) $f_n(x)$ continue in E $\forall n$

$\forall x_0 \in E$
$\forall \varepsilon > 0, \forall n \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0, n) : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$

se $|x - x_0| < \delta$

2) $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) : \forall n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in E$

Voglio dimostrare che

$\forall x_0 \in E, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

se $|x-x_0| < \delta$

fisso $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in E$ e pongo

$$\delta(\varepsilon, x_0) := \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}, x_0, \nu\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)+1\right)$$

infatti se $|x-x_0| < \delta$ [per Hp 1]

$$\Rightarrow \left| f_{\nu+1}(x_0) - f_{\nu+1}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$ inoltre

$$\left| f_{\nu+1}(x) - f(x) \right|, \left| f_{\nu+1}(x_0) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

[per Hp 2]

quindi se $|x-x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{\nu+1}(x) + f_{\nu+1}(x) -$$

$$- f_{\nu+1}(x_0) + f_{\nu+1}(x_0)| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Lemma 13.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f sia integrabile in un insieme E è che per ogni $\varepsilon > 0$ esistano due funzioni h e g, integrabili in E, con $h(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, e tali che*

$$\int_E g(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) - \int_E h(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \varepsilon. \qquad [13.2]$$

(viene direttamente dalla definizione

tramite le funzioni semplici e integrali.

Teorema 13.2 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Se una successione f_n di funzioni integrabili in un insieme limitato E converge uniformemente a una funzione $f(\mathbf{x})$, allora f è integrabile in E e si ha*

$$\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \qquad [13.3]$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ se $n > \nu$

fisso $n = \nu + 1$

quindi $\underbrace{f_n(x) - \varepsilon}_{\mathrel{\rotatebox{90}{$\geq$}}\ h(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{f_n(x) + \varepsilon}_{\mathrel{\rotatebox{90}{$\geq$}}\ g(x)}$

ora (dato che E è limitato)

$$\int_E (g(x) - h(x)) = \int_E 2\varepsilon \, dx = 2\varepsilon \, m(E)$$

dato che ε è arbitrario $f(x)$ è integrabile. Inoltre $\forall \varepsilon \ \exists \nu$:

$$\int_E f_n(x) - \varepsilon m(E) \leq \int_E f(x) \leq \int_E f_n(x) + \varepsilon m(E)$$

$\forall n > \nu$ quindi

$$\int_E f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)$$

Teorema 13.3 *Sia f_n una successione di funzioni di classe $C^1([a, b])$ (cioè derivabili e con derivate prime continue in $[a, b]$). Supponiamo che la successione f_n converga uniformemente a f, e che la successione delle derivate f_n' converga uniformemente a g in $[a, b)$. Allora f è derivabile, e $f' = g$.*

se $f_n \in C^1([a,b])$ e $f_n \to f$ unif in $[a,b)$

$f_n' \to g$ unif in $[a,b)$

allora (Teor. Fond. Calc. Int.)

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \text{e per Teorema 13.2}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) + \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt =$$

$$f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \quad \rightarrow \quad f \text{ è derivabile e } f'(x) = g(x). \text{ in } (a,b)$$

(Teor. Fond. Calc. Int.)

Nel caso di una serie

se so che $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)$ converge UNIF. a $S(x)$

allora

$$\int_E S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_E a_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E a_j(x)\,dt$$

per esempio consideriamo la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\,x^{j-1} := S(x) \qquad a_j = j\,x^{j-1}$$

① Verificare che $S_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) \xrightarrow[\text{unif}]{} S$

in $[-\delta, \delta]$ $(\delta < 1)$

$$\left| S(t) - S_n(t) \right| \leq \sup \sum_{j > n} a_j(t) \leq \sum_{j>n} j\,\delta^{j-1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

allora per $x \in [-\delta, \delta]$

fisso $E = [0, x]$

$$\int_E S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E a_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^x j\,t^{j-1}\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} x^j = x \sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{x}{1-x}$$

$$\int_0^x S(t)\,dt = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

$$\Downarrow$$

$$S(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \overset{?}{=} \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j \xrightarrow[\substack{\text{unif in} \\ [-\delta, \delta]}]{} \frac{1}{1-x} =: f(x)$$

$$f_n'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\, x^{j-1} \xrightarrow[\substack{\text{unif. in} \\ [-\delta, \delta]}]{} S(x)$$

allora $f(x)$ è derivabile e

$$S(x) = f'(x) \qquad S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$