$\mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione tre ($\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base)

in generale $\mathbb{R}^n$ ha dim n

definisco

1. Prodotto scalare $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

2. norma $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x \cdot x}$

3. distanza fra 2 punti

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|$$

4. Posso definire un "intorno" di un punto $\vec{x}_0$

$$B_r(\vec{x}_0) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{x}_0| < r \}$$

quindi un intorno di x_0

è un insieme che contiene una

palla di centro x_0.

In modo simile si definiscono

gli aperti: 4

A è aperto in $\mathbb{R}^n$ (con la struttura euclidea)

se $\forall x \in A \ \exists r > 0$:

$B_r(x) \subset A$.

ESEMPI!

DEFINIZIONI ASTRATTE

Posso definirle (in parte) su

insiemi molto più astratti.

questo ci permette di definire le

funzioni continue $E \xrightarrow[f]{} F$

purché E, F siano

SPAZI TOPOLOGICI

un insieme E è dotato di una struttura di sp. topologico se fisso $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ (gli aperti)

$\mathcal{A}$ è un sottoinsieme dell'insieme delle parti di E.

t.c. ① $\emptyset, E \in \mathcal{A}$

② se $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

③ unione arbitraria di aperti è aperto

Se E, F sono spazi topologici

$f: E \to F$ si dice CONTINUA

se la controimmagine di ogni

aperto di F è un aperto di E

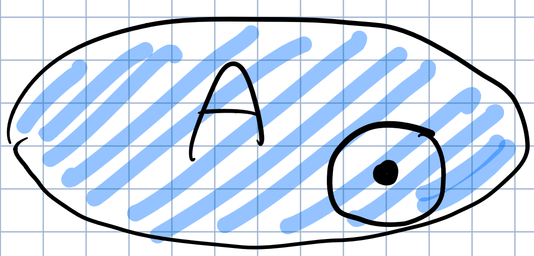
<u>Lemma</u> $\mathbb{R}^n$ con la topologia standard (discussa in ④) è UNO SPAZIO TOPOLOGICO.

Rem!

$A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se

$\forall x \in A \quad \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$

$x^2 + 4y^2 < 1$



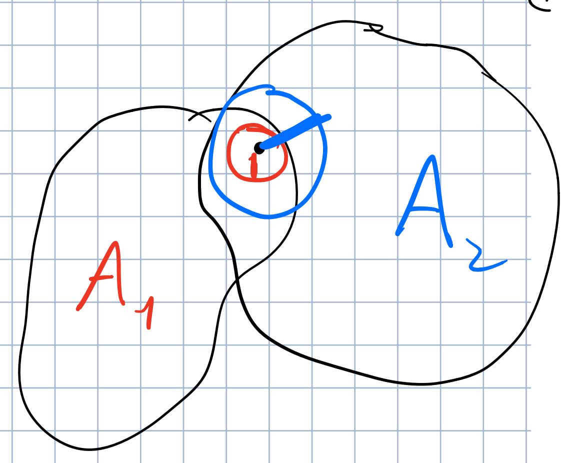
DIMOSTRAZIONE

① $\emptyset$ è aperto (tautologico)

② $\mathbb{R}^n$ è aperto infatti $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\forall r > 0 \quad B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$

se A_1 è aperto e A_2 è aperto



$\Rightarrow A_1 \cap A_2$ è aperto

infatti $\forall x \in A_1 \cap A_2$

$x \in A_1$ e $x \in A_2$

quindi $\exists r_1 : B_{r_1}(x) \in A_1$

$\exists r_2 : B_{r_2}(x) \in A_2$ ma se $r_1 < r_2$

$$B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x) = B_{r_1}(x) \subset A_1 \cap A_2$$

Esercizio dim. che l'unione arbitraria di aperti è aperto

SPAZIO METRICO (M, d)

Un insieme M dotato di una funzione

$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tale che

1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Se definiamo $B_r(x_0) := \{x \in M : d(x,x_0) < r\}$

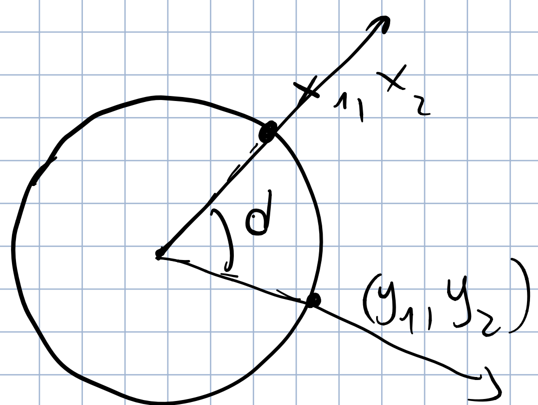
possiamo dotare (M,d) di una struttura di spazio topologico ponendo

$A \subset M$ aperto se $\forall x \in A \ \exists r > 0 :$

$B_r(x) \subset A$

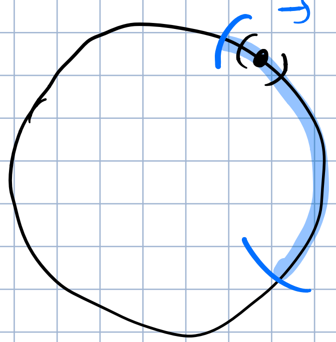
(che è proprio la definizione che si era data su $\mathbb{R}^n$)

Esempio $M : \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$



$d(x,y) =$

angolo fra le due semirette espresso in radianti.



→ estremi esclusi

← questo è un aperto

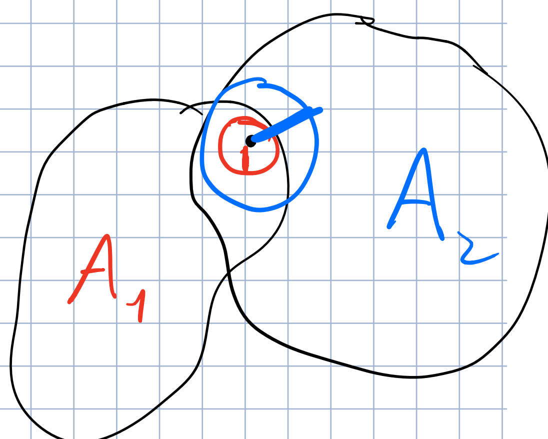
Esercizi: se (M,d) è uno spazio metrico $\Rightarrow$ è uno sp. topologico.

(cioè valgono le proprietà degli spazi topologici ① - ② - ③

① è tautologico.

② se A_1 è aperto e A_2 è aperto

$\Rightarrow A_1 \cap A_2$ è aperto



infatti $\forall x \in A_1 \cap A_2$

$x \in A_1$ e $x \in A_2$

quindi $\exists\, r_1 : B_{r_1}(x) \in A_1$

$\exists\, r_2 : B_{r_2}(x) \in A_2$ ma se $r_1 < r_2$

$$B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x) = B_{r_1}(x) \subset A_1 \cap A_2 \quad \boxtimes$$

— Definizioni sugli Spazi Vettoriali

Per ricordare:

V è uno spazio vettoriale REALE se

$$v, w \in V \rightarrow v + w \in V$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V \quad \lambda v \in V$$

$\underline{f}_1, \dots \underline{f}_n \in V$ formano una base per V

se $\forall v \in V \quad \exists! \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{f}_i$$ il che implica

$$\sum \lambda_i \underline{f}_i = 0 \iff \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

$V, \|\cdot\|$ è uno spazio normato

se

(i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

(iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Esempio:

Spazio dei polinomi di grado ≤ 2

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = p(x) \in V$$

posso definire su le somme che il prodotto per $\lambda \in \mathbb{R}$.

una base è dato da

f_0: 1 $\quad (x \longrightarrow 1 \quad \forall x)$

f_1: x $\quad (x \longrightarrow x$

f_2: x^2 $\qquad p \longrightarrow (a_0, a_1, a_2)$

posso definire $\|p\| = \max\limits_{i=1,\dots,3} |a_i|$

Esercizio: dim che quella sopra è una nor

Esercizio: Dimostrare che

Se $V, \| \ \|$ è uno spazio normato $\Rightarrow$ è uno spazio metrico ponendo

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Spazio con prodotto scalare

V (spazio vettoriale) è dotato di un prodotto scalare $(\ , \ )$ se $(\ , \ ) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $(v, w) = (w, v)$
2. $(\lambda v, w) = \lambda (v, w)$;

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$$

3. $(v, v) \geq 0$ $\quad (v, v) = 0 \iff v = 0$

Esempio. $\mathbb{R}^n$ con

n

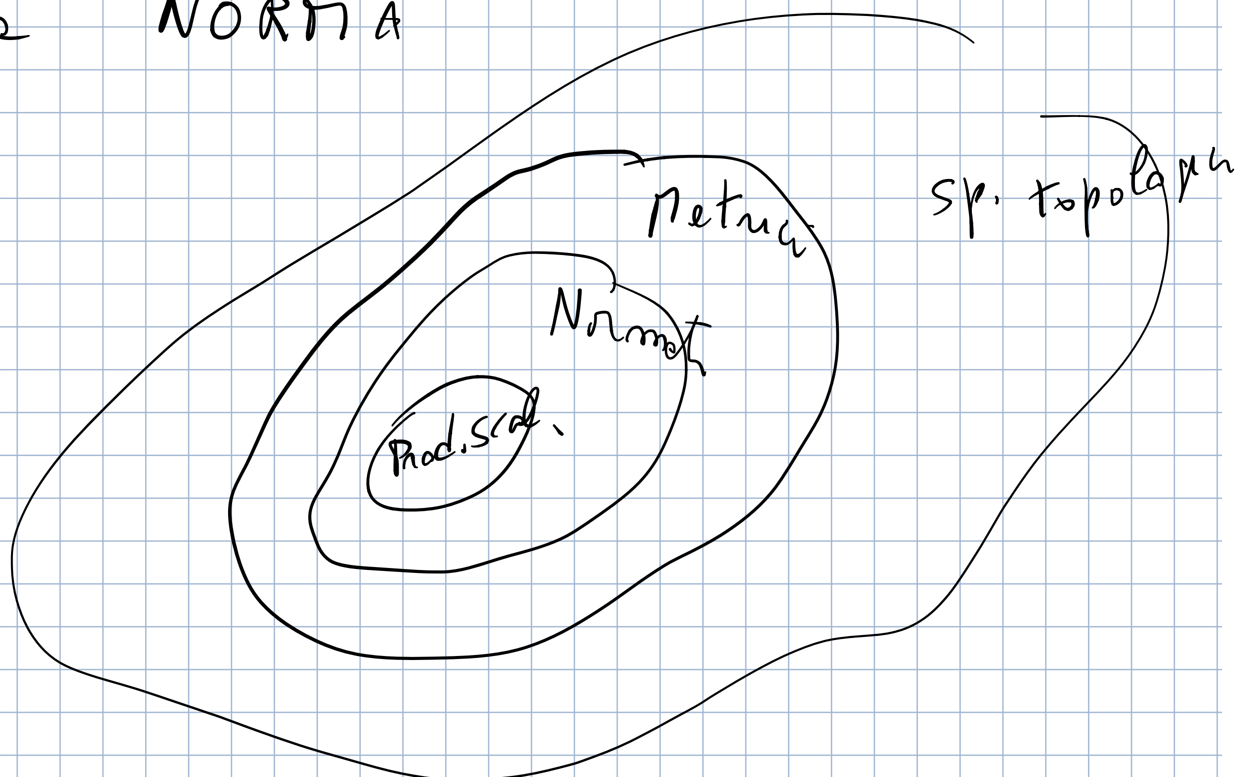
$$(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Esercizio: dimostrare che se

$V, (\cdot,\cdot)$ è uno spazio con prod.

scalare allora $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$

è una NORMA



se $(\,,\,)$ è un prod. scalare

Esercizio $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$ definisce

una norma cioè soddisfa:

(i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(i) Viene da (1)

(ii) Viene da (2) infatti

$$\|\lambda v\|^2 = (\lambda v, \lambda v) = \lambda (v, \lambda v) =$$

$$\lambda(\lambda v, v) = \lambda^2 (v, v)$$

$$\|\lambda v\|^2 = (\lambda v, \lambda v) = \lambda (v, \lambda v) =$$

$$\lambda(\lambda v, v) = \lambda^2 (v, v)$$

Per dimostrare (iii) vogliamo che

$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$ (Cauchy)

per la dimostrazione (suppongo $v, w \neq 0$

fisso $t > 0$

$$0 \leq (v - tw, v - tw) = \|v\| + t^2\|w\| - 2t(v,w)$$

$$(v,w) \leq \frac{1}{2t}\left(\|v\|^2 + t^2\|w\|^2\right)$$

minimizzo in $t > 0$ $\quad t = \frac{\|v\|}{\|w\|}$

(il modulo viene se considero $t < 0$)

Dimostro (iii)

$$(v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v,w)$$

per la disuguaglianza di Cauchy

$$(v+w, v+w) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\|$$

quindi

$$\|v+w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \blacksquare$$

Definizione di limite

$a_n : \mathbb{N} \longrightarrow M$ (spazio metrico)

Successione convergente (definizione)

$\lim_{n \to \infty} a_n = a \in M$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$

t.c. se $n > N$ allora $d(a_n, a) < \varepsilon$

Successione di Cauchy (definizione)

$a_n : \mathbb{N} \longrightarrow M$ è di Cauchy

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ t.c.

se $n, m > N$ allora $d(a_n, a_m) < \varepsilon$

Uno spazio metrico si dice COMPLETO

se ogni successione di Cauchy in M

è convergente in M