Teorema della divergenza:

Sia V un dominio regolare limitato (definito da una o più disequazioni con funzioni $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$)

Sia ∂V il suo bordo (che è una superficie regolare a tratti)

sia $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ dove A è un aperto che contiene V

$$\int_V \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V,+} F \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

mentre $\partial V, +$ è il bordo di V orientato con il versore normale uscente da V.

DIMOSTRAZIONE:

La dimostrazione segue dalle seguenti formule: Sia $f \in C^1(V, \mathbb{R})$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \\ \hat{n}_3 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \int_V \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} f \, \hat{n}_1 \, dS$$

$$(2) \quad \int_V \frac{\partial f}{\partial y} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} f \, \hat{n}_2 \, dS$$

$$(3) \quad \int_V \frac{\partial f}{\partial z} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} f \, \hat{n}_3 \, dS$$

e do per buone queste tre formule

ottengo

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_V \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} F_1 \, \hat{n}_1 \, dS \quad (\text{per } (1))$$

$$\int_V \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} F_2 \, \hat{n}_2 \, dS \quad (\text{per } (2))$$

$$\int \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial V} F_3\, \hat{n}_3\, dS \quad (\text{per } (3))$$

sommo e viene il teo. della div.!

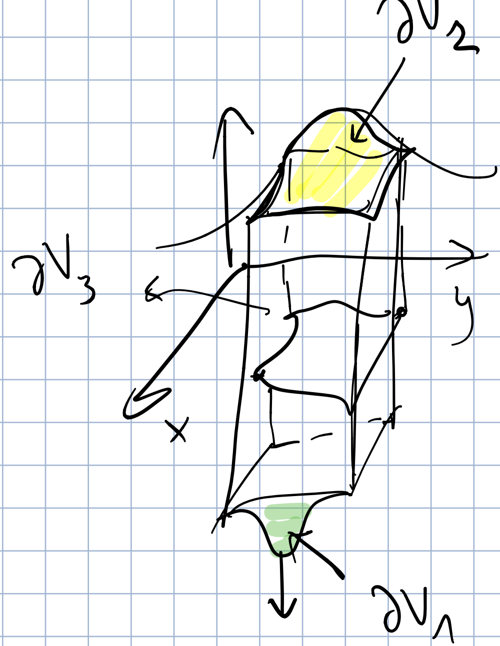
Le Formule $\underbrace{\ }_{(1),(2),(3)}$ le dimostriamo solo nel caso di un dominio normale rispetto a tutte le variabili

$$V = \{ (x,y) \in K \quad \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \}$$

K un dominio in $\mathbb{R}^2$

Dimostro

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial V} f\, \hat{n}_3\, dS$$



$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \int_K dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz =$$

$$\int_K dx\,dy \Big(\underset{(*)}{f(x,y,\beta(x,y))} - \underset{(**)}{f(x,y,\alpha(x,y))} \Big)$$

ora calcoliamo

$$\int_{\partial V} f\, \hat{n}_3\, dS = \int_{\partial V_1} f\, \tilde{n}_3\, dS + \int_{\partial V_2} f \cdot \hat{n}_3\, dS + \underbrace{\int_{\partial V_3} f\, \hat{n}_3\, dS}_{=\,0}$$

il terzo addendo $= 0$ dato che $\hat{n}_3 = 0$

(il versore normale è ORIZZONTALE su ∂V_3)

parametrizzo ∂V_2

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases} \qquad u, v \in K$$

$$z = \beta(u, v)$$

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta_u \end{pmatrix} \qquad \varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta_v \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & k \\ 1 & 0 & \beta_u \\ 0 & 1 & \beta_v \end{bmatrix} \qquad \hat{n} = \begin{pmatrix} -\beta_u \\ -\beta_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial V_{2,+}} f \, \hat{n}_3 \, dS = \int_K \underbrace{f(u, v, \beta(u, v))}_{= \, *} \underbrace{\vec{n}_3}_{= \, 1} \, du \, dv$$

$$\int_{\partial V_{1,+}} f \, \hat{n}_3 \, dS = - \int_K \underbrace{f(u, v, \alpha(u, v))}_{= \, (**)} \, du \, dv$$

$$\int_{\partial V} f\, \hat{n}_3\, dS = \int_K \left[f(u,v,\beta(u,v)) - f(u,v,\alpha(u,v)) \right] du\,dv$$

$$\parallel$$

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\,dy\,dz \qquad \boxed{}$$

Se V è normale rispetto alle x

cioè $V := \left\{ (y,z) \in K_1 \ , \ \alpha_1(y,z) < x < \beta_1(y,z) \right\}$

scambiando $x \leftrightarrow z$ e seguendo

il ragionamento di prima dimostro

anche

$$\int_V \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} F_1\, \hat{n}_1\, dS$$

e lo stesso vale se V è normale rispetto

alla y. Quindi se V è normale

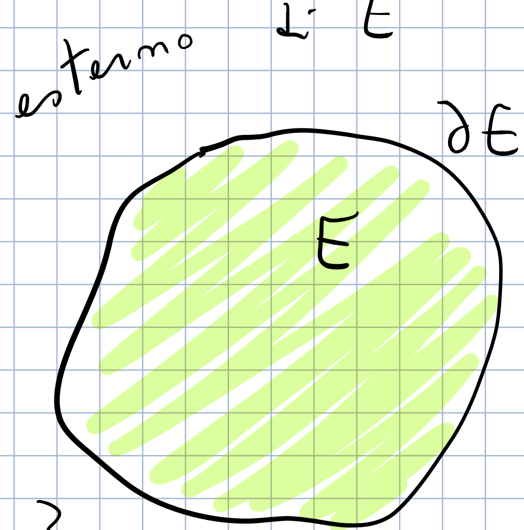
rispetto a tutte e tre le variabili

Ho dimostrato (1), (2), (3) e quindi il teorema della Divergenza.

Formule di Gauss - Ostrogskii

Le formule (1), (2), (3) si possono scrivere anche in $\mathbb{R}^2$.

Sia E un dominio di $\mathbb{R}^2$ (E è definito da un numero finito di disequazioni con funzioni $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$) sia ∂E il suo bordo (che è UNA CURVA regolare a tratti)



$$E : \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{t.c.} \quad a(x,y) \le 0 , \right\}$$

$$\partial E \ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{t.c.} \ a(x,y) = 0 \}$$

γ è una curva regolare a tratti localmente esplicitabile!

REM se $[a,b] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$ è una parametrizzazione che ha come sostegno ∂E $\left(\varphi([a,b]) = \partial E\right)$

il vettore tangente è $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Definisco

il vettore normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$

Proposizione (Gauss - Green)

sia $f(x,y)$ una funzione $C^1(A, \mathbb{R})$ dove A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ $E \subset A$.

(1) $$\int_E \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\, dy = \int_{\partial E,+} f(x,y) \, \hat{n}_1 \, d\ell$$

$$\textcircled{2} \quad \int_E \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial E,+} f(x,y)\, \hat{n}_2 \, d\ell$$

Qui $\partial E,+$ è una curva regolare a tratti parametrizzata in modo che il versore normale punti verso l'esterno di E)

$\hat{n}$ è il versore normale

$d\ell$ è l'elemento di lunghezza

REM $\quad [a,b] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \qquad \varphi([a,b]) = \partial E$

il vettore tangente è $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

è vettore normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} \dot y(t) \\ -\dot x(t) \end{pmatrix}$

quindi $\hat{n} = \dfrac{\vec{n}}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}$

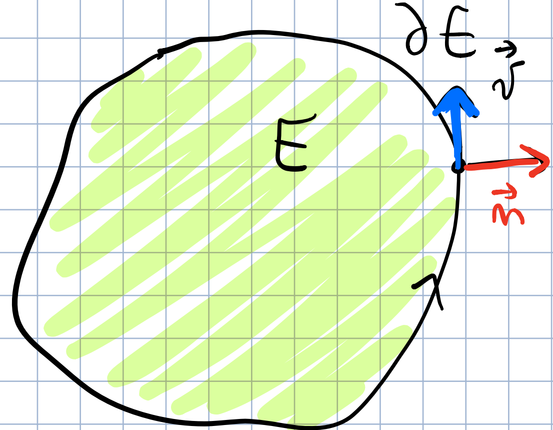
$$d\ell = |\dot\varphi|\, dt = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\; dt$$

e in definitiva

$$\int_{\partial E,+} f(x,y)\cdot \hat{n}_1 \, d\ell = \int_a^b f(x(t),y(t))\, \dot y(t)\, dt$$

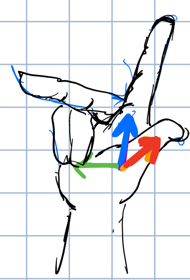
Come si riconosce la parametrizzazione che dà l'orientamento della normale esterna?

(in una curva chiusa un orientamento è un verso di



percorrenza della curva (in senso orario o antiorario)

Se $\vec{n} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ vuol dire che orientato secondo la figura sopra

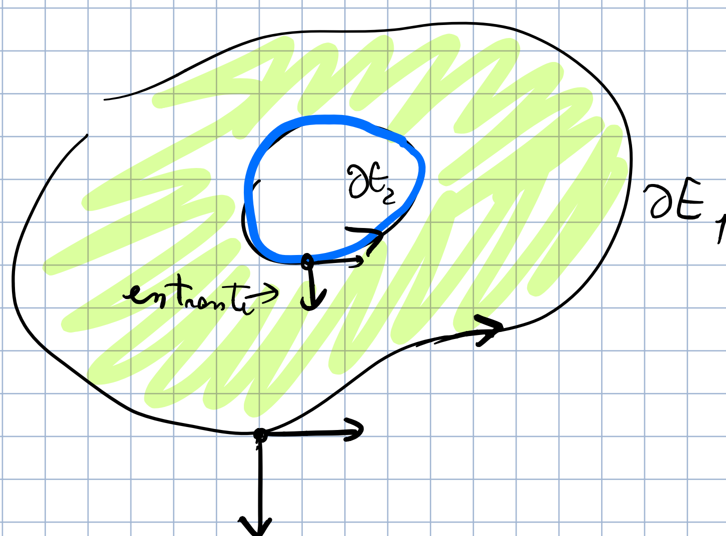


(Nella regola della mano destra
$\vec{v}$ è l'indice
$\vec{n}$ il pollice)

quindi nel disegno sopra l'orientamento ∂E, + è quello ANTIORARIO

Altro esempio

$\partial E = \partial E_1 \cup \partial E_2$
↓
in blu



ora su ∂E_1 l'orientamento uscente

è ANTIORARIO

su ∂E_2 è orario !

Le formule ①, ② si dimostrano

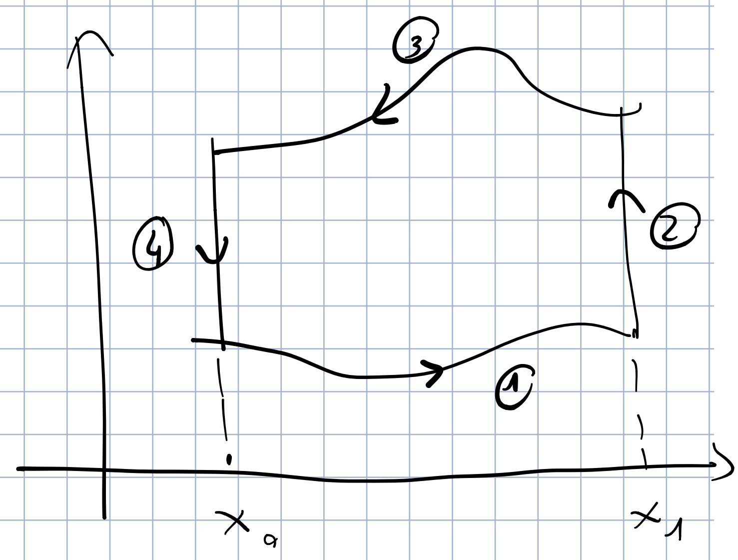
ESATTAMENTE come in dimensione 3

(è più facile)

① $$\int_E \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial E, +} f(x,y)\, \hat{n}_2\, dl$$

Supponiamo che E sia normale

$$E : \{ x_0 \le x \le x_1 , \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$$



$$\int_{\partial E,+} f(x,y)\, \hat{n}_2 \, dl =$$

$$= \int_{\partial E_1} f\, \hat{n}_2 \, dl + \int_{\partial E_2} f\, \hat{n}_2 \, dl + \int_{\partial E_3} f\, \hat{n}_2 \, dl + \int_{\partial E_4} f\, \hat{n}_2 \, dl$$

ma in ②, ④ il vettore normale è orizzontale! quindi $\int = 0$

Parametrizziamo ①

$$\begin{cases} x(t) = t & x_0 \leq t \leq x_1 \\ y(t) = \alpha(t) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha'(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial E_{1,+}} f(x,y)\,\hat{n}_2\,dl = -\int_{x_0}^{x_1} f(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$= -\int_{x_0}^{x_1} f(t,\alpha(t))\,dt$$

Se

Parametrizziamo ③

$$\begin{cases} x(t) = t & x_0 \le t \le x_1 \\ y(t) = \beta(t) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta'(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} \beta'(t) \\ -1 \end{pmatrix}$$

questo mi da la parametrizzazione della NORMALE ENTRANTE !

$$\int_{\partial E_{1,+}} f(x,y)\,\hat{n}_2\,dl = -\int_{\partial E_{1,-}} f(x,y)\,\hat{n}_2\,dl =$$

$$= -\left(- \int_{x_0}^{x_1} f(t, \beta(t))\, dt \right)$$

quindi sommando

$$\int_{\partial E, +} f \, \hat{n}_2 \, dl = \int_{x_0}^{x_1} f(t, \beta(t))\, dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t, \alpha(t))\, dt$$

ma per il teorema fond. del calcolo integrale

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \left(f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x)) \right) = \int_{\partial E, +} f \, \hat{n}_2 \, dl$$

☒

Due conseguenze interessanti:

1 Teorema della div. in $\mathbb{R}^2$

Sia $F \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ $\quad A \subset \mathbb{R}^2$

un aperto $E \subset A$

$$\int_E \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial E,+} F \cdot \hat{n} \, d\ell$$

② Teorema del rotore in $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\partial E,+} F \cdot \hat{\tau} \, d\ell = \int_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Dimostro ②

RICORDO che

① $$\int_E \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\, dy = \int_{\partial E,+} f(x,y) \, \hat{n}_1 \, d\ell$$

② $$\int_E \frac{\partial f}{\partial y} \, dx\, dy = \int_{\partial E,+} f(x,y) \, \hat{n}_2 \, d\ell$$

uso ① con $f = F_2$

$$\int_E \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\,dy = \int_{\partial E,+} f(x,y)\, \hat{n}_1 \, d\ell$$

ricordo che $\vec{n} = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$ quindi

$$\hat{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \quad e \quad \hat{n}_1 = \hat{v}_2$$

$$\left(v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

quindi

$$\int_E \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\,dy = \int F_2 \, \hat{v}_2 \, d\ell$$

ora uso ② con $f = F_1$

$$\int_E \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial E,+} F_1\, \hat{n}_2\, d\ell$$

ma $\hat{n}_2 = -\hat{v}_1$ (vedi sopra)

quindi

$$\int_E \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\int F_1\, \hat{v}_1\, d\ell$$

quindi facendo la differenza

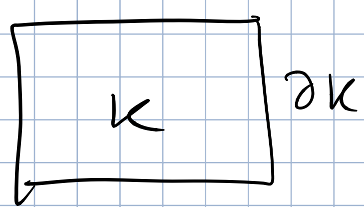
$$\int \left(F_1 \hat{v}_1 + F_2 \hat{v}_2\right) d\ell = \int_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$\blacksquare$

Teorema del Rotore in $\mathbb{R}^3$

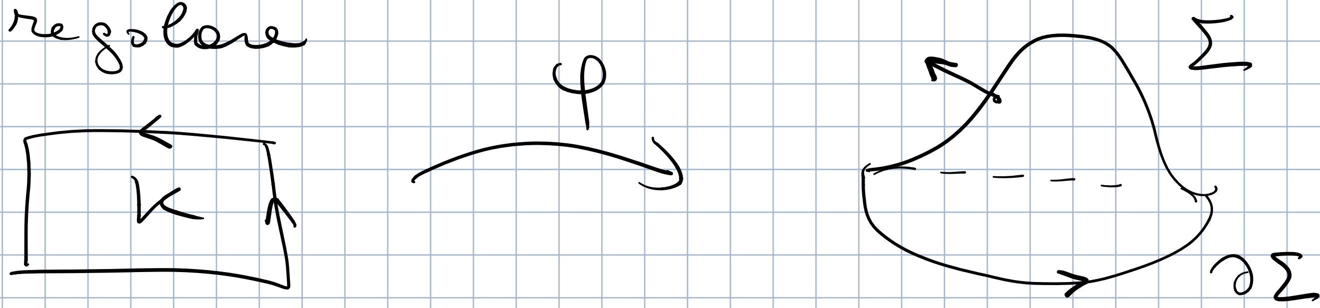
Sia K un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ (come prima definito tramite diseg. di funzioni C^1)

e ∂K è suo bordo



(curve regolare a tratti)

sia φ una parametrizzazione regolare



in modo che $\varphi(\partial K) = \partial \Sigma$

sia a sua volta una curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^3$

Sia $F = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} \in C_1(A, \mathbb{R}^3)$

$\Sigma \subset A$

definiamo $\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F$

$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial\Sigma, +} F \cdot \hat{\tau} \, d\ell$$