

Esercizio: Dimostrare che

Se $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato
 $\Rightarrow$ è uno spazio metrico ponendo

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Spazio con prodotto scalare

V (spazio vettoriale) è dotato

di un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$

$$\text{e } (\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\textcircled{1} (v, w) = (w, v)$$

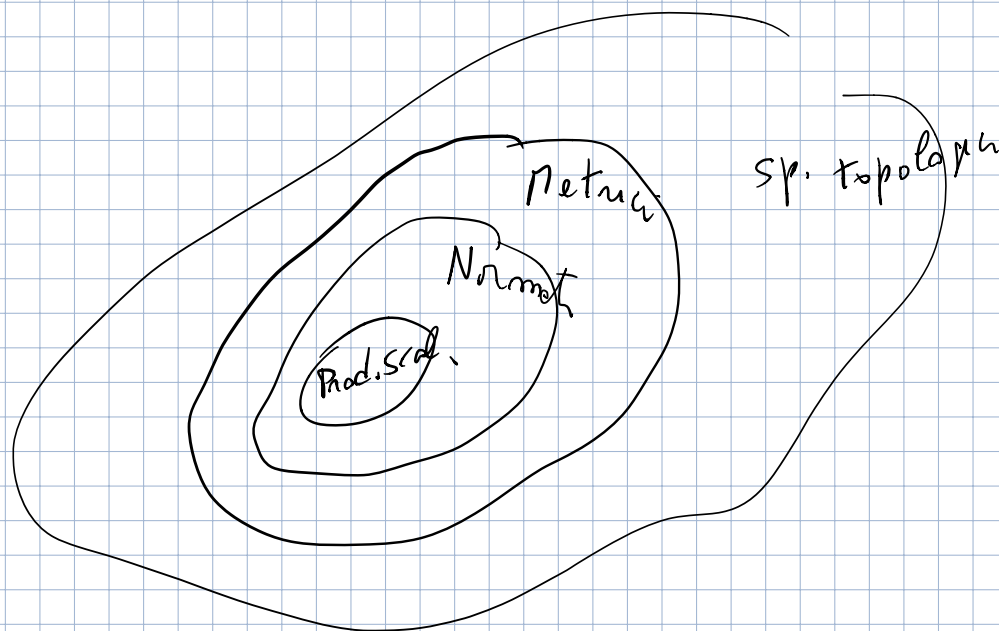
$$\textcircled{2} (\lambda v, w) = \lambda (v, w);$$

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$$

$$\textcircled{3} (v, v) \geq 0 \quad (v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

E semp. no. $\mathbb{R}^n$ con

$$(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$



Esercizio: dimostrare che

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\| \quad (\text{Cauchy})$$

per la dimostrazione (supponi $v, w \neq 0$)

fino a $t > 0$

$$0 \leq (v - tw, v - tw) = \|v\|^2 + t^2 \|w\|^2 - 2t(v, w)$$

$$(v, w) \leq \frac{1}{2t} (\|v\|^2 + t^2 \|w\|^2)$$

minimizzato in $t > 0$ $t = \frac{\|v\|}{\|w\|}$

(il modulo viene considerato $t < 0$)

Esercizio: dimostrare che se

$V, (\cdot, \cdot)$ è uno spazio con prod. scalare allora $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$

è una NORMA che soddisfa:

(i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

① Viene da ①

(ii) si da ② in toto

(ii) viene da

$$\|\lambda v\|^2 = (\lambda v, \lambda v) = \lambda(v, \lambda v) =$$

$$\lambda(\lambda v, v) = \lambda^2(v, v)$$

$$\|\lambda v\|^2 = (\lambda v, \lambda v) = \lambda(v, \lambda v) =$$

$$\lambda(\lambda v, v) = \lambda^2(v, v)$$

Dimostro (iii)

$$(v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v, w)$$

per le disuguaglianze di Cauchy

$$(v+w, v+w) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\|$$

quindi

$$\|v+w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \square$$

Definizione di limite

$a_n : \mathbb{N} \rightarrow M$ (spazio metrico)

Successione convergente (definizione)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in M \quad \text{e} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$$

t.c. se $n > N$ allora $d(a_n, a) < \varepsilon$

Successione di Cauchy (definizione)

$a_n : \mathbb{N} \rightarrow M$ è di Cauchy

e $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ t.c.

e $n, m > N$ allora $d(a_n, a_m) < \varepsilon$

Uno spazio metrico si dice **COMPATTO**

Se ogni successione di Cauchy in M
è convergente in M

Uno spazio normato completo si dice

SPAZIO DI BANACH

Uno spazio con prodotto scalare completo

SPAZIO DI HILBERT

Norme equivalenti

Sullo stesso spazio vettoriale possiamo mettere varie norme diverse

Per esempio in $\mathbb{R}^n$ oltre alle norme euclidee

$$\mathbb{R}^n, || \cdot ||_\infty \quad |x|_\infty = \max |x_i|$$

(la norma infinito)

$$\mathbb{R}^n, || \cdot ||_1 \quad |x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

(la norma uno o l_1)

Sono tutte norme! (verificano le hp.)

Diciamo che due norme $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$
 su V sono equivalenti se $\exists C, c$
 $\forall v$

$$c\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq C\|v\|_b$$

il che implica

$$\frac{1}{C}\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq \frac{1}{c}\|v\|_a$$

Esercizio $B_r(x_0, \|\cdot\|_a) := \{x \in V : \|x - x_0\|_a < r\}$

$B_r(x_0, \|\cdot\|_b) := \dots$

dimostrare che $\forall x_0 \in V; \forall r > 0$

$$\textcircled{1} B_r(x_0, \|\cdot\|_b) \subseteq B_{\frac{r}{C}}(x_0, \|\cdot\|_a)$$

$$\textcircled{2} B_{cr}(x_0, \|\cdot\|_a) \subseteq B_r(x_0, \|\cdot\|_b)$$

Proposizione: (demonstreremo fra qualche gg)

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita allora tutte le NORME SONO equivalenti.

Sia E lo spazio delle funzioni continue $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

① E è uno spazio vettoriale

②
$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$\|\cdot\|_{\infty}$ è una norma

③
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad \|\cdot\|_1 \text{ è una norma}$$

④ Non sono equivalenti !

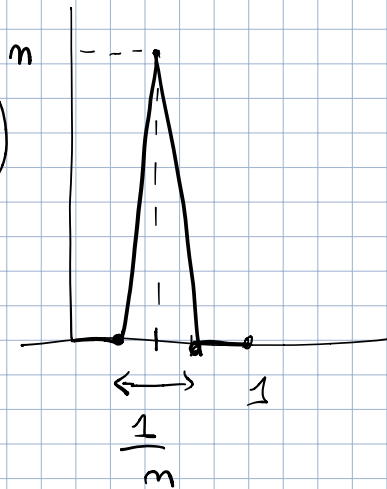
Sicuramente $\|f\|_1 \leq \int_0^1 \max_{x \in [0,1]} |f(x)| dx$

quindi $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$

però posso

costruire (una successione)
di funzioni

$f_m(x)$



in cui $\forall m$

$$\max |f_m(x)| =$$

mentre $\int_0^1 |f_m(x)| dx =$

da questo si vede che non
può essere vero che $\exists$ una costante
c

t.c. $\forall f \in E$

$$\|f\|_{\infty} \leq C \|f\|_1$$

Esercizio Disegnare in $\mathbb{R}^2$ la palla unitaria nelle norme $\|\cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$.

Mostare che le tre norme sono equivalenti in $\mathbb{R}^n \forall n$
 (e calcolare le costanti C, c)

Esercizio: Dimostrare che se $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ sono due norme equivalenti su uno spazio vettoriale V allora

se $v_n \rightarrow v$ in V e' una successione di Cauchy per la norma $\|\cdot\|_a$ allora e' di Cauchy anche rispetto alla norma $\|\cdot\|_b$

se $v_n \rightarrow v$ in V e' una successione convergente per la norma $\|\cdot\|_a$ allora e' di Cauchy anche rispetto alla norma $\|\cdot\|_b$

Esercizio: Siano E, F e G spazi topologici e siano $h: E \rightarrow F$ e $k: F \rightarrow G$ due funzioni continue. Dimostrare che la composizione e' continua.

Dato un insieme E , si verifichi che ponendo che ogni sottoinsieme di E e' aperto si dota E di una topologia.

Dato E come sopra e un qualsiasi spazio topologico F si dimostri che tutte le funzioni $E \rightarrow F$ sono continue.