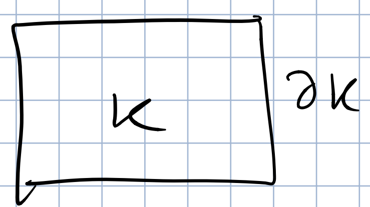
Teorema del Rotore in $\mathbb{R}^3$

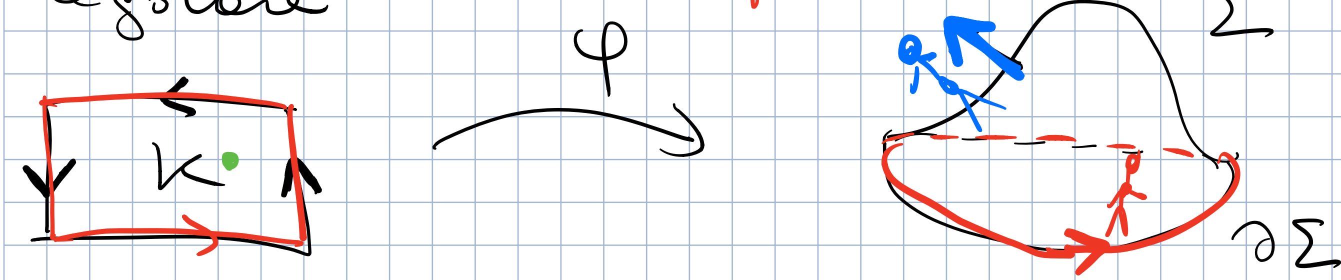
Sia K un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ (come prima definito tramite disug. di funzioni C^1)

se ∂K è il suo bordo



(curve regolare a tratti)

Sia φ una parametrizzazione regolare iniettiva fino al bordo



in modo che $\varphi(\partial K) = \partial\Sigma$

sia a sua volta una curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^3$

Sia $F = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$

$\Sigma \subset A$

definiamo $\text{rot}\, F := \nabla \wedge F$

$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}\, F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

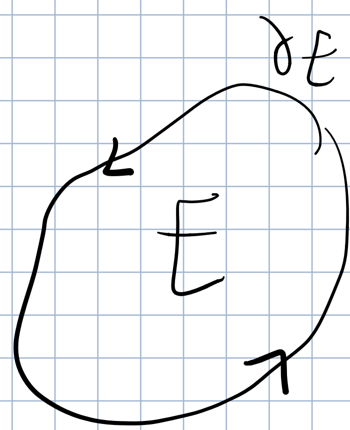
Si ha:

$$\int_{\Sigma} \text{rot}\, F \cdot \hat{n}\, dS = \int_{\partial\Sigma,+} F \cdot \hat{\tau}\, d\ell$$

REM. abbiamo dimostrato

ieri l'equivalente in $\mathbb{R}^2$

Sia E un dominio in $\mathbb{R}^2$



(definita da un numero finito di disequazioni con funzioni C^1)

∂E è una curva regolare a tratti:

$$\int_E \operatorname{rot} F \, dx\,dy = \int_{\partial E,+} F \cdot \tilde{\tau} \, dl$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

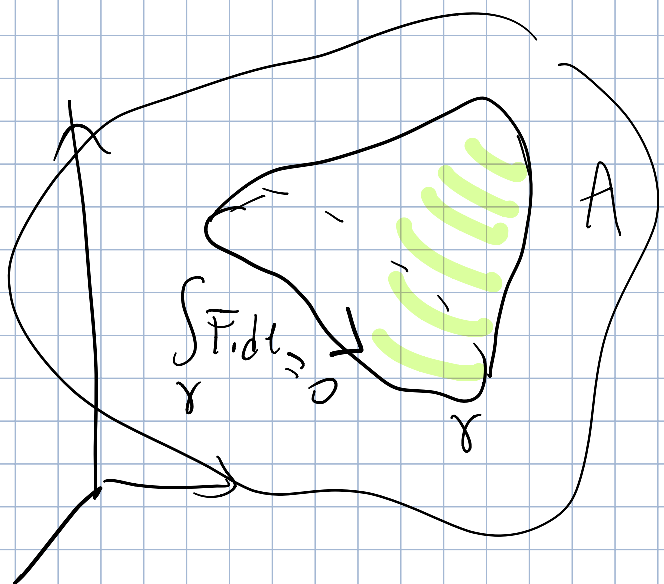
$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{pmatrix}$$

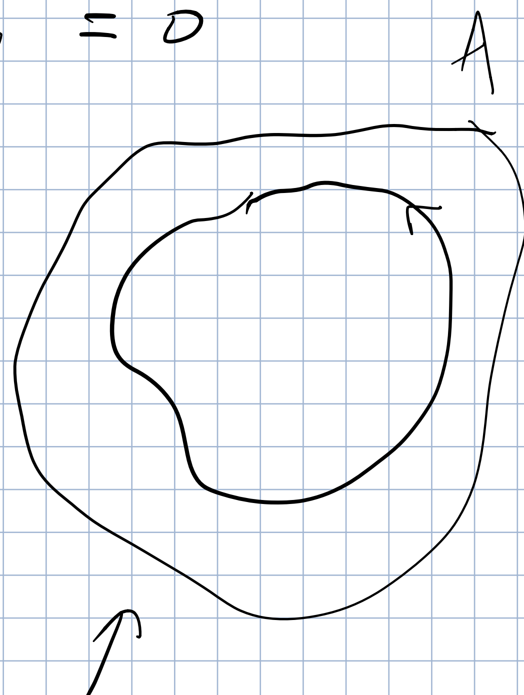
Vediamo un pó di conseguenze.

① Se $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ ha

$\text{rot } F = 0 \quad \forall (x,y,z) \in A$

$\Rightarrow$ Il lavoro lungo ogni curva regolare chiusa CHE È IL BORDO di una superficie regolare $\subset A$ $= 0$



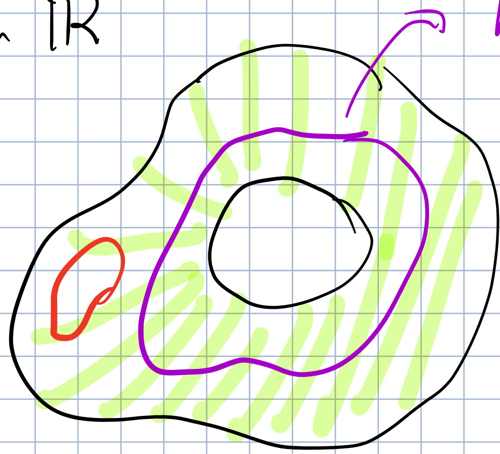


In $\mathbb{R}^2$, stessa cosa ma γ è il bordo di UN DOMINIO

Non è detto che una curva chiusa sia il bordo di una superficie $\subseteq A$

Per esempio in $\mathbb{R}^2$

$$F = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



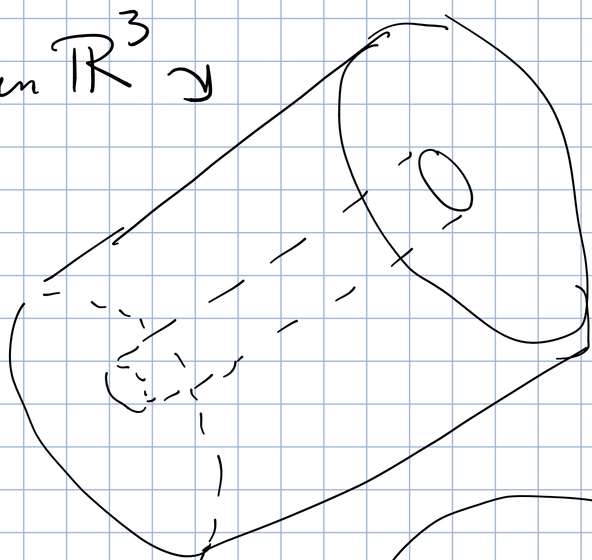
Non è il bordo di un dominio

siamo migliorare questo risultato.

Definizione 16.4 *Diciamo che un insieme connesso $A \subset \mathbf{R}^2$ è semplicemente connesso se per ogni curva semplice e chiusa γ con sostegno contenuto in A, quest'ultimo è la frontiera di un insieme limitato tutto contenuto in A.*

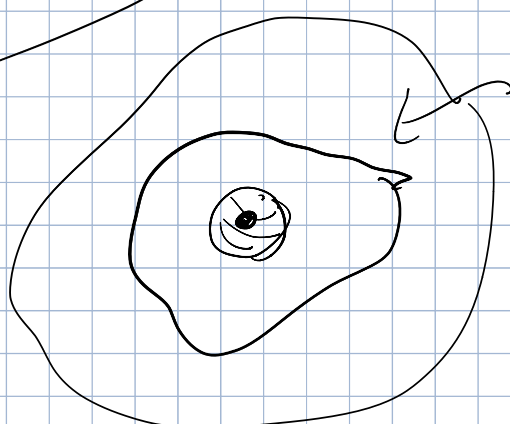
NON SEMPLICEMENTE CONNESSO

in $\mathbb{R}^3$

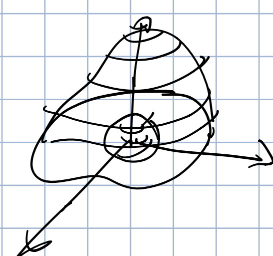


SEMPL. CONNESSO

in $\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^3 / \{0\}$



Prop. Se $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ con

A semplicemente connesso

e $\operatorname{rot} F = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma F \cdot \hat{\nu}\, dl = 0$

per ogni curva chiusa reg. a tratti $\gamma \subset A$

Dim. se A è semplicemente connesso e γ è chiusa e reg. a tratti $\Rightarrow \gamma = \partial\Sigma$ per una qualche superficie $\Sigma \subset A$

$$\int_\gamma F \cdot \hat{\nu}\, dl = \int_{\partial\Sigma} F \cdot \hat{\nu}\, dl = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

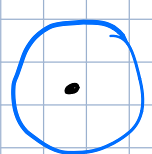
$\blacksquare$

Esercizio 1 Sia $A = \mathbb{R}^2 / \{0\}$ e sia

$F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ tale che

(1) $\operatorname{rot} F = 0$

e



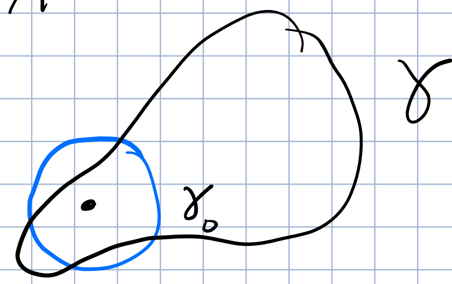
γ_0

(2) $\displaystyle\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{\nu}\, dl = 0$ (γ_0 è la circonferenza unitaria centrata in $x = 0$)

dimostrare che per ogni curva chiusa

regolare a tratti $\gamma \subset A$

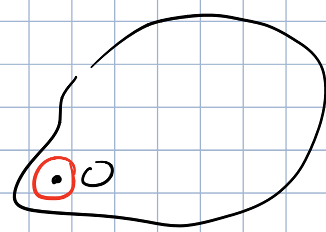
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \nu \, dl = 0$$



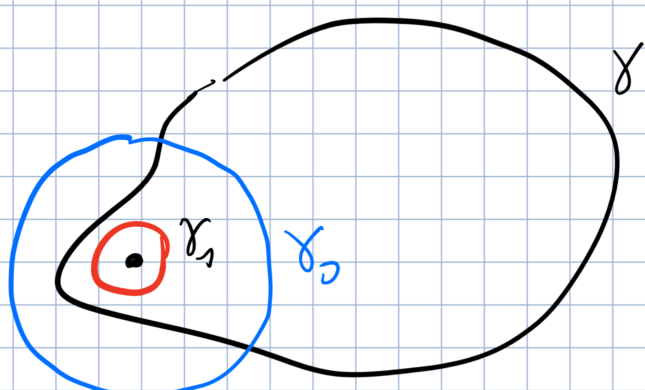
Suggerimenti:

1. Sia γ una curva chiusa in $A \Rightarrow$ γ divide $\mathbb{R}^2$ in una parte interna a γ ed una esterna

Oss 1. $\exists\ 0 < \delta < 1$ tale che la palla di centro l'origine e raggio $= \delta$ è contenuta all'interno di γ



Il bordo della palla di raggio δ è una curva regolare la chiamo γ_1



Passo 1. Dimostrare che $\int_{\gamma_1} F\cdot\hat{\nu}\,dl = \int_{\gamma_0} F\cdot\hat{\nu}\,dl = 0$

Passo 2. Dimostrare che $\int_{\gamma_1} F\cdot\hat{\nu}\,dl = \int_{\gamma} F\cdot\hat{\nu}\,dl$

Esercizio 2. Sia γ una curva chiusa regolare a tratti $[a,b] \xrightarrow{\varphi} \gamma \subset \mathbb{R}^n$ $\varphi(a)=\varphi(b)$

Sia $f \in C^2(A, \mathbb{R})$ $\gamma \subset A \subset \mathbb{R}^n$ (A aperto)

$F = \nabla f$ è un campo vettoriale

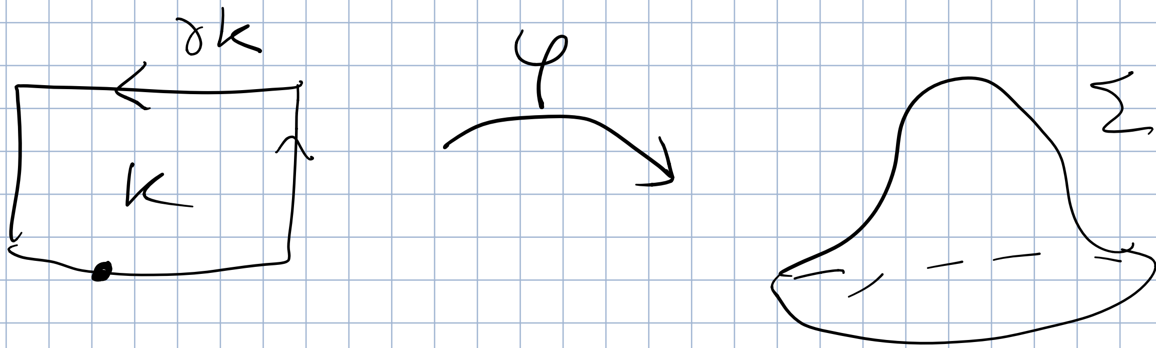
(N.B $F \in C^1(A, \mathbb{R})$)

dimostrare che $\int_{\gamma} F\cdot\hat{\nu}\,dl =$

Dimostriamo il teorema del Rotore in $\mathbb{R}^3$ (lo deduciamo dal teorema corrispondente in $\mathbb{R}^2$ che abbiamo dimostrato tramite le formule di Gauss-Green.)

$$\int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\text{rot} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$



$$\partial \Sigma = \varphi(\partial K)$$

parametrizzo ∂K

$$[a,b] \longrightarrow \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

Param. Σ

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

deduco che $\partial \Sigma$ è parametrizzata da

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

calcoliamo $\hat{n}$ e dS

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \quad ; \quad \varphi_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)\|} \begin{pmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix}, \quad dS = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du\, dv$$

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, dS =$$

$$\Bigg(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

$$(y_u z_v - z_u y_v$$

$$= \int_K \begin{pmatrix} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix} du\, dv$$

$\swarrow$ esplicitamente

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)(y_u z_v - z_u y_v) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)(z_u x_v - x_u z_v)$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(x_u y_v - y_u x_v)$$

Poniamo ora $V = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$

$$M(u,v) = F_1 x_u + F_2 y_u + F_3 z_u$$

$$N(u,v) = F_1 x_v + F_2 y_v + F_3 z_v$$

ovviamente $F_1 \equiv F_1(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} x_v + \frac{\partial F_1}{\partial y} y_v + \frac{\partial F_1}{\partial z} z_v \right) x_u + F_1 x_{uv}$$

$+$ etc...

fatti tutti i conti viene fuori che

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, dS =$$

$$= \int_K \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix} du\, dv$$

$$\|$$

$$\iint_K \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) (y_u z_v - z_u y_v) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) (z_u x_v - x_u z_v) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (x_u y_v - y_u x_v) \right] du\, dv =$$

$$\int_K \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) du\,dv = \int_K \operatorname{rot} V \, du\,dv$$

$$= \int_{\partial K} V \cdot \hat{v} \, dl$$

$\uparrow$ questo è il versore velocità

$$\begin{cases} u(t) \\ v(t) \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\int_a^b \left(M \cdot \dot{u} + N \dot{v}\right) dt =$$

$$\int_a^b \left[\left(F_1 x_u + F_2 y_u + F_3 z_u\right)\dot{u} + \right.$$
$$\left. + \left(F_1 x_v + F_2 y_v + F_3 z_v\right)\dot{v}\right] dt$$

In conclusione

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, dS = \int_a^b \left[F_1\left(x_u \dot{u} + x_v \dot{v}\right) + F_2\left(y_u \dot{u} + y_v \dot{v}\right) + \right.$$
$$\left. + F_3\left(z_u \dot{u} + z_v \dot{v}\right)\right] dt$$

Ora calcoliamo

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot \hat{v}\, dl \qquad \partial\Sigma : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_u u' + x_v v' \\ y_u u' + y_v v' \\ z_u u' + z_v v' \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot \hat{v}\, dl = \int_a^b \left[\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u u' + x_v v' \\ y_u u' + y_v v' \\ z_u u' + z_v v' \end{pmatrix} \right] dt$$

$\boxtimes$

Cambiamento di coordinate e Lavoro

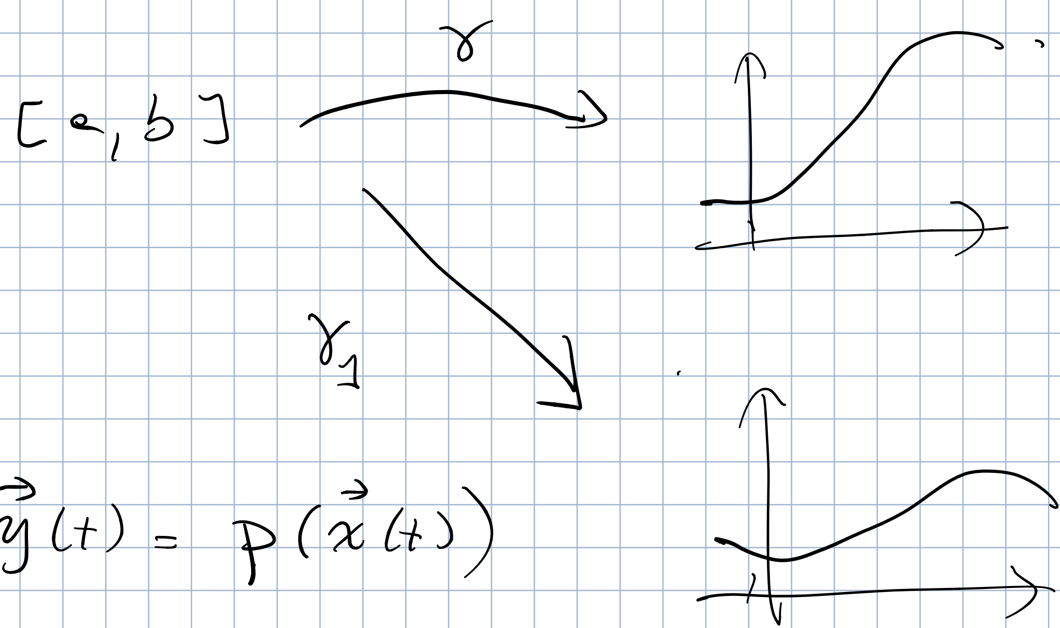
Sia γ una curva regolare

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3$$

$$t \to (\vec{x}(t))$$

ovviamente sto considerando UNA PARTICOLARE base per $\mathbb{R}^n$

cosa succede se cambio le coordinate?



$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^n, \vec{x} \\ \Big\downarrow p \\ \mathbb{R}^n, \vec{y} = p(\vec{x}) \end{array}$$

$$\vec{y}(t) = p(\vec{x}(t))$$

ora immagino di avere un c.v. F nelle variabili $\vec{x}$ di cui voglio calcolare il lavoro lungo γ

$$\int_\gamma F \cdot \hat{v} \, d\ell = \int_a^b F(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \, dt$$

voglio trovare F_1 (c.v. nelle variabili y) in modo che

$$\int_{\gamma_1} F_1 \cdot \hat{v}\, dl = \int_{\gamma} F \cdot \hat{v}\, dl$$

$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$\int_a^b F_1(y(t)) \cdot \dot{\vec{y}}(t)\, dt = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt$$

$$\vec{y}(t) = p(x(t)) \Rightarrow \dot{y}_i = \sum_J \frac{\partial (p)_i}{\partial x_J} \dot{x}_J$$

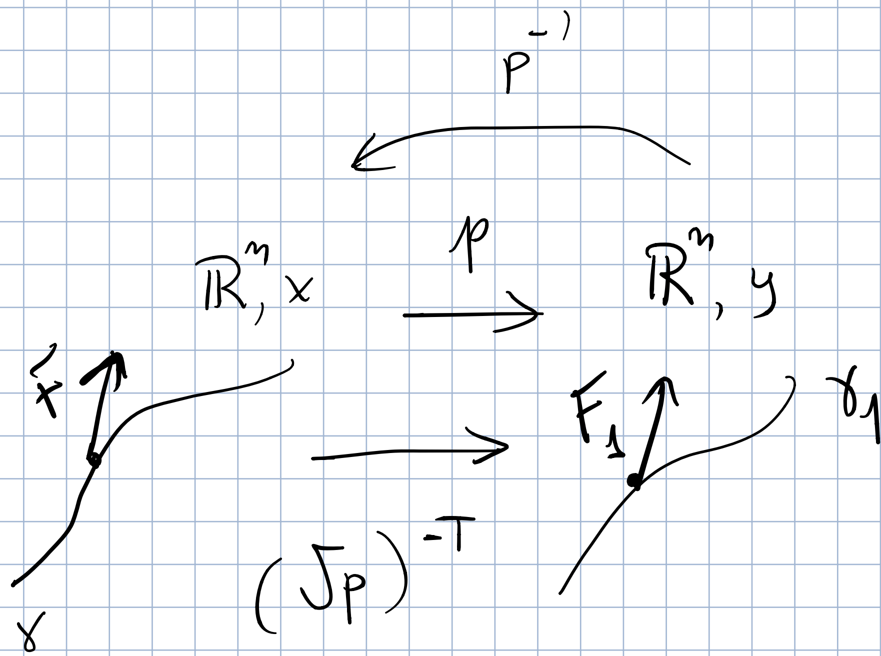
$$\dot{\vec{y}}_i = (J_p)\, \dot{\vec{x}}$$

$$\int_a^b F_1(p(x(t))) \cdot \left[(J_p)\, \dot{x}\right] dt = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt$$

$$\shortparallel$$

$$\int_a^b (J_p)^T F_1(p(x(t))) \cdot \dot{x}\, dt$$

$$F_1(y) = (J_p)^{-T} F(p^{-1}(y))$$



p^{-1}
p
$\mathbb{R}^n, x$
$\mathbb{R}^n, y$
F_1
γ_1
$(Jp)^{-T}$
γ