Definizione 1.11 *Sia* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \overline{E}$ *e, per* $\delta > 0$, $E_\delta(x_0) := \{x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta\}$.
(i) *si dice che* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *è il* **limite di f per x che tende a** x_0, $\alpha = \lim_{x\to x_0} f(x)$, *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon\ ,\ \forall\, x \in E_\delta(x_0)\ . \tag{1.18}$$

Nel caso $m = 1$, *si definiscono, rispettivamente, il limite superiore (o "massimo limite") e il limite inferiore (o "minimo limite") di* f *quando* x *tende a* x_0 *i numeri*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) := \inf_{\delta>0} \sup_{x\in E_\delta} f(x)\ , \qquad \liminf_{x\to x_0} f(x) := \sup_{\delta>0} \inf_{x\in E_\delta} f(x)\ . \tag{1.19}$$

(ii) *Una funzione* f *si dice* **continua** *in* $x_0 \in E$ *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in E_\delta(x_0)\ . \tag{1.20}$$

Una funzione f *si dice* **continua su** E, *ovvero* $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$, *se è continua in ogni punto* x_0 *di* E.

Osservazione 1.12 (i) Ovviamente, se x_0 è un punto d'accumulazione di E allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e (nel caso $m = 1$) esiste il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ se e solo se $\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x)$.
(ii) Se A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $(x_0, y_0) \in A$ allora

$$f(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y)\ ; \tag{1.21}$$

(e, naturalmente, tale relazione si estende in modo ovvio al caso di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$).

Proposizione 1.13 *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$.
(i) f *è continua in* $x_0 \in E$ *se e solo se*

$$\forall\ \{x^{(k)}\} \subseteq E \quad \text{tale che} \quad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)\ . \tag{1.22}$$

(ii) f *è continua su* E *se e solo se per ogni aperto* $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(U)$ *è un aperto nella topologia relativa di*[9] E.
(iii) Siano f, g *funzioni continue in* $x_0 \in E$ *ed a valori in* $\mathbb{R}^m$ *e sia* $h : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *continua in* $y_0 \in U$. *Allora:* $f + g$ *è continua in* x_0; *se* $f(x_0) = y_0$, $h \circ f$ *è continua in* x_0; *nel caso* $m = 1$, fg *è continua in* x_0; *nel caso* $m = 1$ *e* $f(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ *è continua in*[10] x_0.

Osservazione 1.14 Il caso scalare è particolarmente importante:

(i) *La funzione vettoriale* $f : x \in E \subseteq \mathbb{R}^n \to f(x) := \big(f_1(x), ..., f_m(x)\big) \in \mathbb{R}^m$ *è continua in* $x_0 \in E$ *se e solo se sono continue in* x_0 *le* m *funzioni scalari* $f_i : E \to \mathbb{R}$.

La dimostrazione segue dal punto (i) della Proposizione 1.13 e dal punto (i) della Proposizione 1.10.

ne 1.10.

(ii) *È facile vedere che $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 punto interno di A se e solo se per ogni cammino $z : [a,b] \to A$ con $z(t_0) = x_0$ $(a < t_0 < b)$, la funzione $f \circ z$ è continua in t_0.*

Il "solo se" deriva dal punto (v) della Proposizione 1.13. Per dimostrare il "se" si prenda $\{x^{(k)}\} \subseteq B_\delta(x_0) \subseteq A$ con $x^{(k)} \to x_0$. È possibile costruire un cammino $z : [0,2] \to B_\delta(x_0)$ e una successione $\{t_k\} \subseteq [0,1]$ tale[11] che $t_1 = 0$; $t_k \uparrow 1$; $z(1) = x_0$ e $z(t_k) = x^{(k)}$ per ogni k. Ora, se f non è continua in x_0, per il punto (i) della proposizione 1.13, la successione $\{f(x^{(k)})\}$ non converge a x_0, il che, per l'osservazione appena fatta, implica che esiste un cammino $z : [0,2] \to B_\delta(x_0)$ con $z(1) = x_0$ per cui $f \circ z$ non è continua in $t = 1$. ∎

Esempio 1.15 In vista dell'osservazione precedente, considereremo solo funzioni scalari.

(i) La funzione $x \in \mathbb{R}^n \to |x| \in \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}^n$.

Infatti, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta := \varepsilon$, da (1.13) segue che $\big||x| - |x_0|\big| \le |x - x_0| < \varepsilon$.

(ii) Sia $1 \le i \le n$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione $x \in \mathbb{R}^n \to g(x_i)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}^n$. In particolare $x \in \mathbb{R}^n \to x_i^m$, con $m \in \mathbb{N}$, è una funzione continua su $\mathbb{R}^n$.

Infatti, $x \to x_i$ è continua (essendo, per ogni x_0 e ε, $|x_i - x_{0i}| \le |x - x_0| < \varepsilon$ se $\delta := \varepsilon$) e l'affermazione deriva dal punto (v) della Proposizione 1.13.

(iii) La funzione $f : x \in \mathbb{R}^4 \to 1 + x_1 x_2 + 3x_3 x_4^5 \in \mathbb{R}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^4$. Più in generale ogni polinomio su[12] $\mathbb{R}^n$ è continuo su tutto $\mathbb{R}^n$.

L'affermazione deriva dal punto precedente e dal punto (v) della Proposizione 1.13.

(iv) La funzione $f : x \in \mathbb{R}^3 \to \dfrac{e^{(x_1 x_3)}}{\sqrt{1 + x_2}} + |x|^{\sqrt{2}}$ è continua sul suo insieme di definizione, ovvero su $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_2 > -1\}$.

L'affermazione deriva dai punti (i) e (ii) precedenti e dal punto (v) della Proposizione 1.13.

(v) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|x|y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è continua su $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e non è continua in $(0,0)$.

Infatti, la continuità su $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ è conseguenza del punto (ii) qui sopra e del punto (v) della Proposizione 1.13. Per dimostrare che f non è continua in $(0,0)$, per il punto (i) della Proposizione 1.13, basta trovare una successione $(x_k, y_k) \to (0,0)$ tale che $f(x_k, y_k) \not\to \alpha$. Se $\alpha = 0$, possiamo scegliere $(x_k, y_k) = (1/k, 1/k)$ mentre se $\alpha \neq 0$ possiamo scegliere[13] $(x_k, y_k) := (1/k, 1/k^2)$.