Rem. convergenza UNIFORME

$f_n(x) \to f(x)$ unif. in E se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

se $f_n \in C(E,\mathbb{R})$ e $f_n \to f$ unif

allora $f \in C(E,\mathbb{R})$

(E è limitato)

se f_n sono integrabili e $f_n \to f$ unif

allora f è integrabile e

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

se $f_n \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ $f_n \to f$ unif

$f_n' \to g$ unif allora $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$

e $f'(x) = g(x)$

in termini della serie

se $S_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$ converge unif.

$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$

allora $\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j$

se S_n e S'_n convergono unif.

$$\frac{d}{dx} \sum_j f_j(x) = \sum_j \frac{d}{dx} f_j(x)$$

VERSIONE CONTINUA

(invece di studiare $\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$

considero $\int_F f(x,y)\,dy = g(x)$

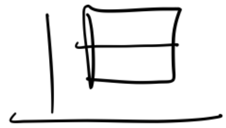
$\partial \in E$

$$\lim_{x \to 0} \int_F f(x,y)\,dy = \int_F f(0,y)\,dy$$

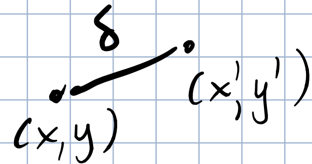
Teorema 13.4 *Sia E un insieme compatto di $\mathbf{R}^n$, F un insieme compatto e misurabile di $\mathbf{R}^k$, e $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ una funzione continua in $E \times F$. La funzione*

$$g(\mathbf{x}) = \int_F f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

è uniformemente continua in E.



Dato che $E \times F$ è compatto $f(x,y)$ è unif. continua



<u>Hp</u> $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,$ se $|(x,y) - (x',y')| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon$.

Tesi

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{\delta}(\varepsilon) > 0 :$ se $|x - x'| < \tilde{\delta}$

$\Rightarrow |g(x) - g(x')| < \varepsilon \qquad \tilde{\delta}(\varepsilon) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{m(F)}\right)$

$$|g(x) - g(x')| \leq \int_F |f(x,y) - f(x',y)| \, dy \leq \varepsilon \, m(F)$$

se $y' = y$ se $|x - x'| \leq \delta(\varepsilon)$ allora

$|f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon$

Teorema 13.5 (Derivazione sotto il segno di integrale) *Se E è aperto, e la derivata $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ lungo la direzione $\mathbf{v}$ esiste ed è continua in $E \times F$, la funzione $g(\mathbf{x})$ risulta derivabile in E nella direzione $\mathbf{v}$, e si ha*

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \int_F \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \qquad [13.5]$$

$$g(x) = \int_F f(x,y)\, dy$$

Dim. (Extra per chi vuole)

CONVERGENZA TOTALE:

$$\|f\|_E := \sup_{x \in E} |f(x)|$$

Definizione 13.3 *Diremo che la serie di funzioni limitate*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x}) \quad \Leftarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x \in E} |f_k(x)| < \infty$$

converge totalmente *in E, se converge la serie delle norme:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_E < +\infty.$$

Si ha il seguente

alternativamente (ma è uguale)

$\sum f_k(x)$ converge totalmente in E

se $\sup_{x \in E} |f_k(x)| \le M_k$ e $\sum M_k < \infty$

quindi per esempio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad \text{converge totalmente in } [-1, 1]$$

<u>Lemma</u>: La convergenza totale implica la convergenza uniforme la convergenza assoluta e puntuale.

① UNIFORME:

$$\sup_{x \in E} |S - S_n| = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k$$

$$\sup_{x \in E} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m_k \to 0$$

dato che è il resto di una serie convergente!

(2) ASSOLUTA

$$\sum_k |f_k(x)| \leq \sum_k \sup_{x \in E} |f_k(x)| < \infty .$$

(se una serie a termini positivi è limitata allora è convergente)

OSSERVAZIONE:

Si può usare il criterio di convergenza totale anche per le successioni col seguente trucco

una successione g_n si può scrivere come SOMMA PARZIALE di una serie

$$g_n(x) = g_1 + \underbrace{g_2 - g_1}_{f_1} + \underbrace{g_3 - g_2}_{f_2} \dots + \underbrace{g_n - g_{n-1}}_{f_{n-1}}$$

$$g_n(x) = g_1(x) + \sum_{J=1}^{n-1} f_J(x) \quad \text{con} \quad f_J(x) = g_{J+1}(x) - g_J(x)$$

quindi se

$$|f_J(x)| \leq m_J \quad \text{tale che} \quad \sum m_J < \infty$$

allora $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ converge totalmente

e $g_n = g_1 + \sum_{j=1}^{n-1} f_j$ converge uniform.

SERIE DI POTENZE

Una serie della forma

$S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ si dice serie di potenze

Centrata in x_0

$S(x)$ converge sempre in $x = x_0$

1) Esistono serie di potenze che convergono

SOLO in $x = x_0$

Possiamo sempre ipotizzare che $x_0 = 0$

altrimenti cambiamo la variabile

$$x - x_0 = x'$$

Teorema 13.7 *Se la serie [13.7] converge in un punto* $x_0 \neq 0$*, allora converge totalmente in* $I(0, \rho)$ *per ogni* $\rho < |x_0|$.

$\sum a_n x^n$ converge in $x = x_0$

cioé $\sum a_n x_0^n < \infty$

allora necessariamente $a_n x_0^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

in particolare $|a_n x_0^n| < m \quad \forall n$

quindi per $|x| \leq \rho < |x_0|$

$$\sum a_n x^n = \sum a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

quindi $\sup\limits_{|x| \leq \rho} \left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| \leq m \left(\frac{\rho}{|x_0|}\right)^n$

ma $\frac{\rho}{|x_0|} < 1$ quindi $\sum m \left(\frac{\rho}{|x_0|}\right)^n < \infty$

e la serie converge totalmente.

Una conseguenza di questo teorema è che se chiamiamo r l'estremo superiore dei valori di x per i quali la serie converge, avremo che essa convergerà per $|x| < r$, cioè per $x \in I(0, r)$, e non convergerà per $|x| > r$.[3] Il numero r si chiama *raggio di convergenza* della serie $\sum a_n x^n$.

$r := \sup \{ \rho > 0$ t.c. $\sum a_n x^n$ converge in $I(0, r) \}$

RAGGIO DI CONVERGENZA.

Teorema 13.9 *Sia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad [13.10]$$

una serie di potenze, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Allora

1. *se* $L = +\infty$ *la serie converge solo per* $x = 0$,
2. *se* $L = 0$, *la serie converge per ogni* $x \in \mathbf{R}$,
3. *se* $0 < L < +\infty$, *si ha* $r = \frac{1}{L}$.

È il criterio della radice

$\sqrt[n]{|a_n| |x|^n} \longrightarrow L|x|$ se $x \neq 0$

quindi se $L = +\infty$ $\quad L|x| = +\infty > 1$ se $x \neq 0$

se $L = 0$ $\quad L|x| = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

se mmo $\quad L|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{L}$

Se $r > 0$ pongo $f(x) = \sum a_n x^n$

per $x \in (-r, r)$.

Teorema 13.8 *La funzione $f(x)$ ha derivate di qualsiasi ordine continue in $I(0, r)$.*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x^j =: S_n(x)$$

calcolo le derivate di $S_n(x)$

1. MOSTRO che $\forall k$ $\frac{d^k}{dx^k} S_n(x) =: S_n^{(k)}(x)$

è la somma parziale di una serie di potenze.

2. mostro che tutte le serie di potenze $S_n^{(k)}(x)$ hanno

LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA

di $S_n(x)$.

3. Applico i teoremi sulla convergenza uniforme per scambiare le derivate con il $\lim_{n \to \infty}$,

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

$$S'_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot j \, x^{j-1}$$

$$S''_n(x) = \sum_{j=2}^{n} a_j \cdot j \cdot (j-1) \, x^{j-2}$$

$$S^{(k)}_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, j \cdot (j-1) \dots (j-k+1) \, x^{j-k}$$

Invece di studiare la convergenza di $S^{(k)}_n$ posso studiare

$$F_n^{(k)} = x^k S_n^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k)!} x^j$$

(prendiamo $k=1$ tanto posso procedere induttivamente sul # di derivate)

CASO semplificato

Se $\exists \lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{|a_j|} = L \; (< \infty)$

$$F^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} j \, a_j \, x^j$$

applico il criterio della radice a $F^{(1)}$

e noto che

$$\lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{j \, |a_j|} = \lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{j} \cdot \lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{|a_j|} = L$$

$\boxtimes$

CASO GENERALE

Sia r il raggio di convergenza

di' $\sum a_J x^J$ sono ρ, y due numeri positivi t.c. $0<\rho<y<r$

Dato che $y<r$ $\sum |a_J| y^J$ converge e quindi $|a_J| y^J \leq m < \infty$

ora dimostriamo che

$\sum_{J=1}^{\infty} J|a_J||x|^J$ converge per $x=\rho$

infatti $|J a_J \rho^J| = J|a_J| y^J \left(\frac{\rho}{y}\right)^J$

$\leq m J \left(\frac{\rho}{y}\right)^J$

ma per il criterio della radice

la serie $m \sum J \left(\frac{\rho}{y}\right)^J$ è convergente.

quindi $\sum J a_J x^J$ converge totalmente

in $[-\rho, \rho]$ $\forall$ $\rho < r$

$\Rightarrow$ il raggio di convergenza è r

quindi $g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$

è ben definita e continua in $(-R, r)$

e $f'(x) = g(x)$

ora anche $g(x)$ è una serie di potenze quindi posso applicare lo stesso argomento di prima per dire che è derivabile e che la derivata è una serie di potenze ottenuta portando la derivata dentro la somma.

(Rem: il raggio di convergenza resta sempre r!)